計算科学☆実習Bファイナルトライアル (筆記)

樋口さぶろお[1] 配布: 2018-07-31 Tue 更新: Time-stamp: "2018-08-02 Thu 07:50 JST hig"

ファイナルトライアル (筆記) 参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

過程不要

以下の記述について, 正しいものに○, 正しくないものに×をつけよう .

1. ランダムウォークの確率シミュレーションのプログラムは, 母ナントカを推定するために標本を抽出している
2. 行列の積を用いたランダムウォークのマルコフ連鎖のプログラムは, 母ナントカを推定するために標本を抽出している
3. ランダムウォークの確率シミュレーションのプログラムの結果は, 実行のたびに (シードを変えるたびに) 異なる
4. 行列の積を用いたランダムウォークのマルコフ連鎖のプログラムの結果は, 実行のたびに (シードを変えるたびに) 異なる
5. ランダムウォークのマルコフ連鎖のプログラムでは, 行列のサイズ (次元) は, 標本サイズに一致する

2

過程不要

授業で作成した, 確率シミュレーションやマルコフ連鎖によるランダムウォークのプログラムについて, 関数名, 変数名は, サンプルプログラムで使っていたものである. 正しいものに○, 正しくないものに×をつけよう .

1. 確率シミュレーションの main 関数に現れるループのカウンタは, 外側から順に, 時刻 t, サンプル内のデータ番号 n である.
2. 確率シミュレーションの getuniform 関数は, 一様分布 $U(0,1)$ にしたがう乱数を返す
3. マルコフ連鎖のプログラムに現れる 2 重配列 (行列) M の添字は, 行, 列とも座標 x に相当する
4. マルコフ連鎖のプログラムに現れる配列 (ベクトル)p の添字は, 時刻 t に相当する

[1]
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

3

$\boxed{\text{過程不要}}$

標本抽出と推定について, 正しい文に○, 誤りの文に×をつけよう．

1. 不偏標本分散は, 一般に, 標本抽出のたびに異なる値になる
2. 母分布 (母集団) が定まると, 母分散の値は定まる
3. 標本が与えられると, 標本サイズと信頼係数は決まる
4. 標本平均値と母平均値はつねに等しい
5. 区間推定で, 標本サイズを大きくすると信頼区間の幅は小さくなる

4

$\boxed{\text{過程不要}}$

以下の記述について, 正しいものに○, 正しくないものに×をつけよう．ただし, この授業では, 1 人ウォーカー, 複数ウォーカーのランダムウォークの確率シミュレーションには, ラグランジュ表現を使っている.

1. オイラー表現ではウォーカー間の区別がなく, 2 人のウォーカーが同じ位置を占めた後は, どっちのウォーカーがどっちかわからなくなる
2. ゲームで, 1 人だけのプレイヤーキャラクターの座標を表すには, オイラー表現をとるほうがふつうである
3. テトリスで, 落下後のブロックの位置を記録するには, オイラー表現をとるのがふつうである
4. 多数のキャラクターの間に衝突が起きたかどうか判定するのは, オイラー表現をとっているときよりもラグランジュ表現をとっているときのほうが簡単である

5

$\boxed{\text{過程不要}}$

(座標が整数値のみをとる離散型の) ランダムウォークを考える. 座標は $x = 0, 1, 2, \ldots, 9$ に制限されているとする.

6 羽のペンギンが, $x = 1$ に 2 羽, $x = 3$ に 3 羽, $x = 8$ に 1 羽いるとする.

1. ラグランジュ表現を用いたとき, 配列 `x[]` のサイズはどれだけ必要か. また, 配列の各要素はどのような値をとるか.
2. オイラー表現を用いたとき, 配列 `u[]` のサイズはどれだけ必要か. また, 配列の各要素はどのような値をとるか.

6

ある長さを表す離散型確率変数 R(cm) を考える. 確率分布 $f(r)$ は次である.

$$
\begin{aligned}
f(20) =& 0.3\\
f(30) =& 0.3\\
f(40) =& 0.2\\
f(50) =& 0.2\\
f(r) =& 0.0 \quad (r:\text{他})
\end{aligned}
$$

一方, あるおんぼろ工場で生産されるキャンドルの長さは確率的に定まる. 分布 f に従うのではないかと考えているが, 確証はない. キャンドルのサイズ5の標本を抽出したところ長さ (cm) は次のようだった.

$$20, 20, 30, 30, 50$$

1. 標本から, キャンドルの長さの母平均値, 長さが35cm 未満であるものの母比率を推定しよう.
2. 確率変数 R の母平均値 $\mathrm{E}[R]$, 母比率 $P(0 \leq R < 35)$ を求めよう.

7

時刻 t における実数値の座標 $X(t)$ が $X(t) = X(t-1) + R(t), P(X(0) = 0) = 1$ で定まるランダムウォークを考える. ただし, 連続型確率変数 $R(1), R(2), \dots$ は独立同分布にしたがい, $\mathrm{E}[R(t)] = -2, \mathrm{V}[R(t)] = 3$ である.

1. $X(1200)$ の母平均値を求めよう
2. $X(1200)$ の母標準偏差を求めよう.
3. $T = 1200$ が十分に大きいと考えて中心極限定理を利用したとき, $X(1200) < -2550$ となる確率を近似的に求めよう. ただし, 答は標準正規分布の累積分布関数 $\Phi(u)$ で表すこと. $\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\, \mathrm{d}z$ である.

8

連続型確率変数 Q は, 確率密度関数

$$f_{\mathrm{Q}}(q) = \begin{cases} \frac{1}{36} & (64 \leq q < 100) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

にしたがう. 連続型確率変数 R を, $R = g(Q) = \sqrt{Q}$ で定義する.

1. 確率密度関数から $\mathrm{E}[R]$ を計算しよう.
2. 確率密度関数から $R < 9$ となる確率を求めよう.
3. R の標本 $8.0, 8.0, 8.5, 9.0, 9.5$ から $\mathrm{E}[R]$ を推定 (点推定) しよう.
4. Q の標本 $64, 64, 64, 81, 81$ から $\mathrm{E}[R]$ を推定 (点推定) しよう.

9

ある葉書製造マシンは, 正確に横:縦 $= 1 : 1.5$ の長方形の葉書を製造する. しかし, 横の長さは 9cm 以上 10cm 未満の実数値を同じ確からしさでとる. 使われる紙の面積当たりの質量は, 2.0×10^{-2} g/cm^2 である.

1. この葉書製造マシンで作られる, 葉書 1000 枚の束の質量の母平均値を求めよう. 定積分の形で書ければ, 具体的な数値は求めなくてよい.
2. 日本の郵便で送ることのできる葉書の大きさに下限があり, 横は 9cm 以上かつ縦は 14cm 以上であることが必要である (上限もあるが今は気にしなくてよい). この葉書製造マシンで作られる, 葉書 1000 枚の束のうち, 日本の郵便で送ることのできるものの枚数の母期待値を求めよう.

10

1 次の自己回帰モデル AR(1) モデルは, 授業中に使った記号を用いると, $\sigma > 0$,ϕ を定数, $R(t)$ を同分布にしたがう確率変数として次のように書ける.

$$\begin{aligned} X(t) =& \phi \times X(t-1) + R(t) \quad (t = 1, 2, 3, \ldots) \\ \mathrm{E}[R(t)] =& 0, \\ \mathrm{E}[R(t)X(s)] =& 0 \quad (t > s), \\ \mathrm{E}[R(t)R(s)] =& \sigma^2 \times \delta_{t,s} = \sigma^2 \times \begin{cases} 1 & (t = s) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}. \end{aligned}$$

また, $X(0)$ は定数 0 に等しいとしてよい ($P(X(0) = 0) = 1$).

1. $X(2)$ を, $R(1)$, $R(2)$, ϕ で表そう.
2. $\mathrm{E}[X(1)^2]$ を σ と ϕ で表そう.
3. $\phi = -0.9$ のとき, 共分散 $\mathrm{Cov}[X(1), X(2)]$ は正になるか, 0 になるか, 負になるか. 日本語の理由または計算過程とともに答えよう.

11

確率密度関数

$$f_{\mathrm{R}}(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos r & (-\frac{\pi}{2} \le r < \frac{\pi}{2}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

に従う確率変数 R に対応する乱数を, $[0, 1)$ 一様乱数 y から $r = g(y)$ で作りたい. 逆関数法で $g(y)$ を求めよう. プログラムとして書く必要はない.

12

確率密度関数

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}(x-4)(x-6) & (4 \le x < 6) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

に従う乱数を, 棄却法を利用して返す関数 `double getrandom()` を C で書こう. 関数内で $[0,1)$ 一様乱数を返す関数 `double getuniform()` を (答案内で定義せず) 呼び出してよいが, なるべく呼び出しの回数を減らすこと.

計算科学☆実習Bファイナルトライアル (筆記) 略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2018-07-31 Tue 更新: Time-stamp: "2018-08-02 Thu 07:50 JST hig"

これは, 一部の過程のみ記した略解です. プチテストで, 受講者はすべての過程を記す必要があります.

配点 100 点満点.

1-4 は○の番号を挙げています.

1

1,3

配点 1-5:各 1 点, 計 5 点.

2

2,3

配点 1-4:各 1 点, 計 4 点.

3

1,2,5

配点 1-5:各 1 点, 計 5 点.

4

1,3

配点 1-4:各 1 点, 計 4 点.

5

1. 6 羽なのでサイズは 6.
   各要素は, `x[]={1,1,3,3,3,8};` (順序はこうとは限らない)
2. 座標が $x = 0, 1, 2, \ldots, 9$ の計 10 点なので, サイズは 10.
   各要素は `u[]={0,2,0,3,0,0,0,0,1,0};` (順序はこうである必要).

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

配点　1,2:各 3 点, 計 6 点.

6

1. $\mathrm{R} = \frac{1}{5}[20+20+30+30+50] = 30$. 母平均値を 30g と推定する. $\hat{p} = \frac{1}{5}[1+1+1+1+0] = 0.8$. 母比率を 0.8 と推定する.
2. $\mathrm{E}[R] = 20 \cdot 0.3 + \cdots = 33$. $P(0 \le R < 35) = 0.3 + 0.3 = \frac{3}{5}$.

配点　1,2:母平均値 3 点, 母比率 2 点, 計 10 点.

7

1. $R(t)$ が同分布にしたがうので, $\mathrm{E}[X(1200)] = 1200 \cdot \mathrm{E}[R] = -2400$.
2. $R(t)$ が独立同分布にしたがうので, $\mathrm{V}[X(1200)] = 1200 \cdot \mathrm{V}[R] = 3600 = 60^2$. よって, $\sqrt{\mathrm{V}[X(1200)]} = 60$.
3. 中心極限定理から, $Z = \frac{X(1200)+2400}{60}$ は近似的に標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1^2)$ にしたがう. よって, $P(X(1200) < -2550) = P(Z < -\frac{150}{60}) = \Phi(-2.5)$.

配点　1:2 点, 2,3:4 点, 計 10 点.

8

1. $\mathrm{E}[R] = \mathrm{E}[\sqrt{Q}] = \int_{64}^{100} \sqrt{q}\frac{1}{36}\,\mathrm{d}q = \frac{244}{27}$.
2. $P(R < 9) = P(Q < 81) = \int_{64}^{81} \frac{1}{36}\,\mathrm{d}q = \frac{17}{36}$.
3. 標本平均値 $\overline{R} = \frac{1}{5}[8+8+8.5+9+9.5]$ なので, 8.6 と推定できる.
4. 標本期待値 $\overline{\sqrt{Q}} = \frac{1}{5}[\sqrt{64}+\sqrt{64}+\sqrt{81}+\sqrt{81}+\sqrt{81}]$ なので, 8.4 と推定できる.

配点　1-4:各 4 点, 計 16 点.

9

1. 横の長さを確率変数 $R \sim \mathrm{U}(9,10)$ とする. 1 枚の質量 $Q = 1.5R^2 \times 0.02$ の母期待値 (g) は
$$\mathrm{E}[Q] = \mathrm{E}[0.03R^2] = 0.03(\mathrm{V}[R] + \mathrm{E}[R]^2) = 0.03 \times (\tfrac{1}{12} + \tfrac{9+10}{2}) = 2.71.$$
1000 枚だと, 同分布に従う $R_1, \ldots, R_{1000}$ の和を考えて, 2710 g.
2. 送れる条件は, $R \ge 9$ かつ $1.5R \ge 14$. ある 1 枚が送れる母比率は,
$$P(R \ge 9 \text{ and } 1.5R \ge 14) = P(R \ge \tfrac{140}{15}) = 10 - \tfrac{28}{3} = \tfrac{2}{3}.$$
1000 枚だと, 同分布に従う $R_1, \ldots, R_{1000}$ の和を考えて, 枚数の母期待値は, $1000 \times \frac{10}{15} = \frac{2000}{3}$ 枚.

配点　1,2:5 点, 計 10 点.

10

1. $X(1) = \phi X(0) + R(1) = R(1)$. $X(2) = \phi X(1) + R(2) = \phi^2 X(0) + \phi R(1) + R(2) = \phi R(1) + R(2)$.
2. $\mathrm{E}[X(1)^2] = \mathrm{E}[R(1)^2] = \sigma^2$.
3. $\mathrm{Cov}[X(1), X(2)] = \mathrm{Cov}[R(1), \phi R(1) + R(2)] == \phi \mathrm{Cov}[R(1), R(1)] = \phi \mathrm{E}[R(1)^2] = \phi\sigma^2 = -0.9\sigma^2 < 0$.
   $X(2)$ は項 $-0.9X(1)$ を含むので, $X(1)$ が大きいほど $X(2)$ は小さい (負で絶対値が大きい) 傾向がある. よって, 共分散は負になるはずである.

配点　1,2:4 点, 3:2 点, 計 10 点.

11

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{R}}(r)\mathrm{d}r =& f_{\mathrm{Y}}(y)\mathrm{d}y \\ \tfrac{1}{2}\cos r =& \mathrm{d}y \\ \tfrac{1}{2}\sin r =& y + C \end{aligned}$$

$y = 0$ のとき $r = -\pi/2$ より, $C = -\frac{1}{2}$. すなわち $\sin r = 2y - 1$. r の範囲に注意して r について解くと, $r = g(y) = \sin^{-1}(2y - 1)$.

配点　10 点.

12

ソースコード 1: 棄却法

```
extern double getuniform();
double f(double x);

double getrandom(){
  double x,y;
  double M=3.0/4.0; /* max f(x) */

  while(1){
    x=4.0+getuniform()*2.0; /* U(4,6) */
    y=M*getuniform();
    if( y<=f(x) ){
      break;
    }
  }
  return x;
```

```
}

double f(double x){   // assume 1<=x<2.
  return -3.0/4*(x-4)*(x-6);
}
```

配点　10 点.