ランダムウォークの確率の漸化式と初期条件

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B　L03(2018-04-24 Tue)

最終更新: Time-stamp: "2018-04-24 Tue 18:42 JST hig"

今日の目標

- ランダムウォークの $X(t)$ の初期条件と漸化式から, 小さい t に対して, $p(x,t)$ を計算できる.
- ランダムウォークのルールから, 時刻 t に位置 x にいる確率 $p(x,t)$ の初期条件と漸化式が書ける.

http://hig3.net

L02-Q1

Quiz 解答:ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散

1. 標本平均値 $\overline{X(3)} = \frac{1}{10}(3+3+\cdots+(-3)) = 1$. よって, 母平均値 $\mathrm{E}[X(3)]$ は 1 と推定できる.
2. 不偏標本分散 $S^2 = \frac{1}{10-1}((3-1)^2+\cdots+(-3-1)^2) = \frac{32}{9}$. よって母分散 $\mathrm{E}[X(3)]$ は $\frac{32}{9}$ と推定できる.
3. 標本期待値 $\overline{X(3)^3} = \frac{1}{10}(3^3+\cdots+(-3)^3) = \frac{29}{5}$. よって母期待値 $\mathrm{E}[X(3)^3]$ は $\frac{29}{5}$ と推定できる.
4. 標本期待値 $\overline{\mathbf{1}_{[X>1]}(X(3))} = \frac{1}{10}(1+1+1+0+\cdots+0) = \frac{3}{10}$. よって母比率 $p = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[X>1]}(X(3))]$ は $\frac{3}{10}$ と推定できる.

L02-Q2

Quiz 解答:rand() の振る舞い

==の左辺の `getrandom` の返す値, 右辺の `getrandom` の返す値は, それぞれ独立な確率変数. よって, 条件文が真となるのは (0,0),(1,1) の和事象で.

$\frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{2}{3} = \frac{5}{9}$.

p.21 の枠

```
int phi(int x){
  if( x>0 /*のような x の条件式*/ ){
    return 1;
  } else {
    return 0;
  }
}
```

ランダムウォーク

ランダムウォークの定義

$R(t)$: 独立同分布に従う離散型確率変数. $t = 1, 2, 3, \dots$
$X(t)$: 次で決まる確率変数.

初期条件 $X(a) = b$ （正確には $P(X(a) = b) = 1$）
漸化式 $X(t) = X(t-1) + R(t)$ $(t = a+1, a+2, a+3, \dots)$

$R(t)$ が ベルヌーイ分布 西川確率統計 §2.1.2 定義 2.3
$\mathrm{B}(1, p)$ にしたがうとき

$$
\text{確率 } P(R(t) = r) = \begin{cases} p & (r = 1) \\ q = 1 - p & (r = 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}
$$

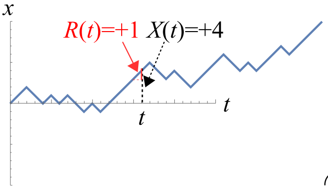
例 $p = \frac{2}{3}$.

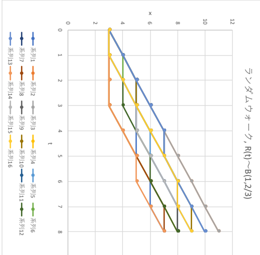
日本語で言うと,

- x 軸上を移動するランダムウォーカーを考える
- ウォーカーは, 時刻 $t = a$ に, $x = b$ から出発する (確率が 1 である)
- ウォーカーは各時刻に, 確率 $2/3$ で $+1$ だけ移動し, 確率 $1/3$ で移動しない

$X(t)$: 時刻 t のランダムウォーカーの座標 (を確率変数とみたもの)
$(X(0), X(1), X(2), \ldots, X(t))$: 経路=パス (path) (を確率変数とみたもの)

$t \backslash x$	0	1	2
0			
1			
2			





ここまで来たよ

2 ランダムウォークの座標の推定

3 ランダムウォークの確率の漸化式と初期条件

- ランダムウォークの座標の確率分布
- 確率分布 $p(x,t)$ の漸化式
- $p(x,t)$ の初期条件
- 初期値・漸化式の適用

L03-Q1

Quiz(ランダムウォークの座標の確率分布)

離散ランダムウォークで, $X(0) = 0$, $X(t) = X(t-1) + R(t)$,

$$P(R(t) = r) = \begin{cases} p & (r = 1) \\ 1 - p & (r = 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

とする $(0 < p < 1)$

1. $P(X(2) = x)$ を求めよう ($x = 0, 1, \ldots$ は整数).
2. $\mathrm{E}[X(2)]$ を求めよう.
3. $\mathrm{V}[X(2)]$ を求めよう.
4. $P(X(2) > 0)$ を求めよう.

cf. 二項分布 西川確率統計 §2.1.2 定義 2.4

$t \backslash x$	0	1	2
0			
1			
2			

ここまで来たよ

2 ランダムウォークの座標の推定

3 ランダムウォークの確率の漸化式と初期条件
- ランダムウォークの座標の確率分布
- 確率分布 $p(x,t)$ の漸化式
- $p(x,t)$ の初期条件
- 初期値・漸化式の適用

確率分布 $p(x,t)$ の定義

$p(x,t)$ の定義

時刻 t に, ウォーカーが x にいる確率 $p(x,t) = P(X(t) = x)$.

確率分布 $f(x) = p(x,t)$ (が t の種類だけたくさんある)

性質 $\forall t \quad \sum_{x=-\infty}^{+\infty} p(x,t) = 1$

$p(x,t)$ の漸化式

具体例で
「ランダムウォーカーが時刻 t に x にいるとき, 時刻 $t+1$ には, 確率 p で $x+1$ に移動し, 確率 $q=1-p$ で x にとどまる.
$\Downarrow$

$$X(t)=X(t-1)+R(t)$$

$$P(R(t)=r)=\begin{cases} p & (r=1) \\ q=1-p & (r=0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

確率微分方程式的描像, ランジュバン方程式的描像

$\Downarrow$
確率 (合計 1) だけど, x 軸上に合計 $N=1000$ 人いるかのように考えよう.
時刻 t に x にいる $N\times p(x,t)$ 人のうち, 時刻 t に, 平均的には

- x から $x+1$ に去るのは, $N\times p(x,t-1)\times p$ 人
- x から移動せず x にとどまるのは $N\times p(x,t-1)\times q$ 人

$X(t)$ の漸化式から $p(x,t)$ の漸化式を導きたい

逆に考えると, 時刻 t に,

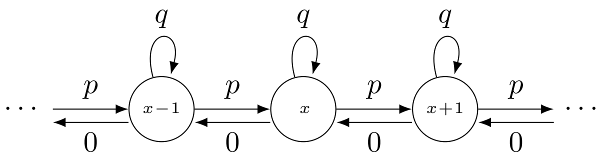
- $x-1$ から, x に来るのは, $\boxed{\qquad\qquad}$ 人
- x から移動せず x にいるのは, $\boxed{\qquad\qquad}$ 人

この合計が, t に x にいる人すべて $N \times p(x,t)$.

$\boxed{\quad}$

両辺のどこにも, 確率変数はなくなった!(確率はあるけど)

拡散方程式的描像, マスター方程式的描像, フォッカープランク方程式的描像



係数は t によらない.

計算で

条件付き確率 確率統計☆演習 II(2018)L01

$$
\begin{aligned}
P(X(t)=x) =& \sum_y P(X(t)=x|X(t-1)=y)P(X(t-1)=y) \\
=& \cdots + 0 \\
& + P(X(t)=x|X(t-1)=x-1)P(X(t-1)=x-1) \\
& + P(X(t)=x|X(t-1)=x)P(X(t-1)=x) + 0 + \cdots \\
=& P(R(t)=1)P(X(t)=x-1) \\
& + P(R(t+1)=0)P(X(t)=x)
\end{aligned}
$$

ここまで来たよ

$p(x,t)$ の初期条件

運動の初期条件 $\Leftrightarrow$ 数列の初項

具体例で

「ランダムウォーカーが時刻 $t=2$ に $x=3$ から出発した」

$\Downarrow$

$X(t)$ の初期条件から $p(x,t)$ の初期条件を導きたい.

例 1

$t = 2$ には $x = 3$ にいる →

$X(2)$	$\cdots$	2	3	4	$\cdots$
確率	0	0	1	0	0

→ $p(x,2) =$

例 2

$t = 1$ には $x = 0, 9$ に各 $\frac{1}{2}$ の確率でいる →

$X(1)$	$\cdots$	0	$\cdots$	9	$\cdots$
確率	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

→ $p(x,1) =$

L03-Q2

Quiz(離散的なランダムウォークの確率の漸化式)

時間 t, 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 $t=5$ に $x=2$ を出発し, 各時刻 t に,

確率 $\frac{1}{7}$ で $+2$ だけ移動
確率 $\frac{4}{7}$ で -1 だけ移動
確率 $\frac{2}{7}$ で 0 だけ移動 (移動しない)

する.
時刻 t にランダムウォーカーが座標 x にいる確率 $p(x,t)$ の漸化式と初期条件を求めよう.

L03-Q3

Quiz(離散的なランダムウォークの確率の漸化式)

時間 t, 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 $t=3$ に $x=2$ を出発し, 各時刻 t に,

確率 $\frac{1}{8}$ で x から $x+1$ に移動
確率 $\frac{3}{8}$ で x から $x-2$ に移動
確率 $\frac{4}{8}$ で x にとどまる

ものとする.
時刻 t にランダムウォーカーが座標 x にいる確率 $p(x,t)$ の (t に関する) 漸化式と初期条件を求めよう.

ここまで来たよ

2 ランダムウォークの座標の推定

3 ランダムウォークの確率の漸化式と初期条件
- ランダムウォークの座標の確率分布
- 確率分布 $p(x,t)$ の漸化式
- $p(x,t)$ の初期条件
- 初期値・漸化式の適用

$p(x,t)$ を表で表現 I

$t\backslash x$	$\cdots$	0	$\cdots$	$x-1$	x	$x+1$	$\cdots$
$\vdots$			$\cdots$				$\cdots$
$t-1$				$p(x-1,t-1)$	$p(x,t-1)$	$p(x+1,t-1)$	
t				$p(x-1,t)$	$p(x,t)$	$p(x+1,t)$	
$\vdots$							

漸化式と初期条件から $p(x,t)$ を計算

L03-Q4

Quiz(ランダムウォークの確率 $p(x,t)$ の漸化式)

ランダムウォークの座標の確率分布の漸化式と初期条件を考える.

$$p(x,t) = \frac{2}{3}p(x-1,t-1) + \frac{1}{3}p(x,t-1), \quad p(x,0) = \begin{cases} 1 & (x=0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

空いてるマスをうめよう.

$t\backslash x$	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$	x	$\cdots$
0	$\cdots$								$\cdots$		$\cdots$
1	$\cdots$								$\cdots$		$\cdots$
2	$\cdots$								$\cdots$		$\cdots$
3	$\cdots$								$\cdots$		$\cdots$
$\vdots$											
t										$p(x,t)$	

L03-Q5

Quiz(ランダムウォークの確率 $p(x,t)$ の漸化式)

ランダムウォークの座標の確率分布の漸化式と初期条件を考える.

$$p(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{5}p(x-1,t-1) + \frac{4}{5}p(x+1,t-1) & (\text{それ以外}) \\ 0 & (x < -1, x > 6) \end{cases},$$

$$p(x,0) = \begin{cases} 0.5 & (x = 1,3) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

下のような $p(x,t)$ の表を埋めよう.

$t \backslash x$	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$	$+7$
0										
1										
2										

お知らせ

Quiz の提出はスマホで撮って Learn Math Moodle へ. 写真の縦横を正しく. スマホをちょっと傾けて.

`https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle`

- 2018-04-27 金 3 実習の春のプチテスト
- チューター/Math ラウンジ 月火水木昼 1-614
- 2018-05-07 月 統計検定の申込締切
- 2018-06-17 統計検定の瀬田学舎団体受験
- Visual Studio 自宅インストールおすすめ中. 計算科学☆実習のページから.