現象の数学 B プチテスト

樋口さぶろお[1] 配布: 2012-11-20 Tue 更新: Time-stamp: "2012-12-04 Tue 11:32 JST hig"

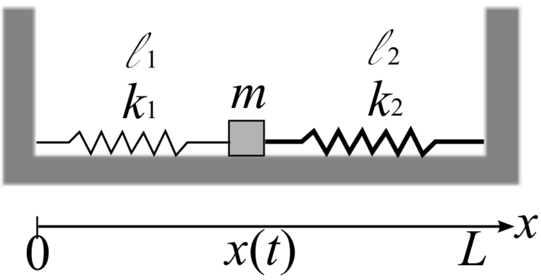
プチテスト参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

過程不要

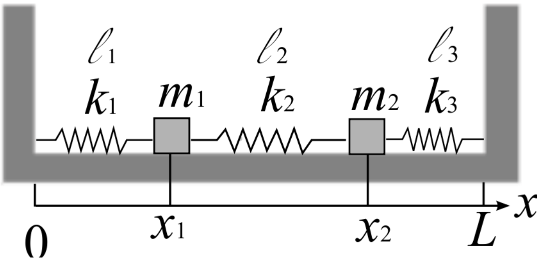
間隔 L の 2 枚の壁の間に, 質量 m の物体を, ばね定数 k_1, k_2, 自然長 ℓ_1, ℓ_2 の 2 個のばねで図のようにつないで設置した. 壁の位置を原点とした x 軸を図のようにとる. 時刻 t における物体の位置を $x(t)$ とするとき, 運動方程式を書こう.



2

過程不要

間隔 L の 2 枚の壁の間に, 質量 m_1, m_2 の 2 つの物体を, ばね定数 k_1, k_2, k_3, 自然長 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 の 3 個のばねで図のようにつないで設置した. 壁の位置を原点とした x 軸を図のようにとる. 時刻 t における物体の位置を $x_1(t), x_2(t)$ とするとき, 運動方程式を書こう.



hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

3

連成振動を表す $u_1(t), u_2(t)$ についての微分方程式系

$$
\begin{aligned}
u_1''(t) &= -\,4u_1(t) + 2u_2(t) \\
u_2''(t) &= +\,4u_1(t) - 6u_2(t)
\end{aligned}
$$

の一般解を求めよう.

4

連成振動を表す $u_1(t), u_2(t)$ についての微分方程式系

$$
\begin{aligned}
u_1''(t) &= -\,6u_1(t) + 1u_2(t) \\
u_2''(t) &= +\,4u_1(t) - 4u_2(t) + 4u_3(t) \\
u_3''(t) &= \qquad\qquad\ \ + u_2(t) - 6u_3(t)
\end{aligned}
$$

を考える. この連成振動の固有周波数のひとつは $\omega = \sqrt{6}$ である. $\omega = \sqrt{6}$ に対応する固有モードと, $\omega = \sqrt{6}$ 以外のすべての固有周波数を求めよう.

5

質量 $m = 4$ の物体が, ポテンシャル $U(x) = -x^4 + 12x^3$ のもとで運動する. 平衡点をすべて挙げ, それぞれの平衡点が安定か不安定かを判定しよう. なお, 一般にポテンシャル $U(x)$ と力 $F(x)$ の関係は $-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x) = F(x)$ で与えられる.

6

x 軸上を運動する物体の時刻 t における位置を $x(t)$ とする. 運動方程式が

$$
2x''(t) = \frac{1}{2} - \cos(x)
$$

で与えられるとき, 安定な平衡点 $x_0 = -\frac{1}{3}\pi$ のまわりの微小振動の周期を求めよう.

7

2 個の物体の x 軸上の運動を考える. 時刻 t における座標をそれぞれ $x_1(t), x_2(t)$ とすると, 運動方程式は

$$
\begin{aligned}
x_1''(t) &= +\,2x_1(t) - x_2(t) + \ell \\
x_2''(t) &= -\,x_1(t) + 2x_2(t) - 5\ell
\end{aligned}
$$

と書ける. ここで $\ell > 0$ は定数.

1. 平衡点を求めよう.
2. 平衡点を原点とする $u_1(t), u_2(t)$ を変位とするとき, $u_1(t), u_2(t)$ の満たす運動方程式を書こう.

8

$\boxed{\textbf{過程不要}}$

x 軸上を単振動する物体の, 時刻 t における位置が

$$x(t) = 2 - 4\sin\frac{\pi - t}{3}$$

で与えられる.

1. 単振動の振幅と周期を答えよう.
2. 横軸 t, 縦軸 x で, $-2\pi \le t \le +2\pi$ の範囲のグラフを描こう.

9

微分方程式

$$3 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -12x(t) + 24, \quad x(0) = 7, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$$

を解いて $x(t)$ を求めよう.

10

2 物体の連成振動の一般解 $\boldsymbol{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ が

$$\boldsymbol{u}(t) = C^{(1)} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \cos(t - \theta^{(1)}) + C^{(2)} \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \cos(\sqrt{3}\, t - \theta^{(2)})$$

で与えられる. $C^{(1)}, C^{(2)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}$ は任意定数である.

初期条件

$$\boldsymbol{u}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \ \boldsymbol{u}'(0) = \left(\begin{smallmatrix} -2\sqrt{3} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

を満たす解 $\boldsymbol{u}(t)$ を求めよう.

次回の授業までの予習復習問題はありません.

現象の数学 B プチテスト略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2012-11-20 Tue 更新: Time-stamp: "2012-12-04 Tue 11:32 JST hig"

配点 1–10 各 10 点. 計 100 点.

1

$$mx''(t) = -k_1(x(t) - \ell_1) + k_2(L - x(t) - \ell_2)$$

配点 ばねののびの絶対値, 符号各 2 点 $\times 2$. 運動方程式の形 2 点.

2

$$\begin{aligned} m_1x_1''(t) &= -k_1(x_1(t) - \ell_1) + k_2(x_2(t) - x_1(t) - \ell_2) \\ m_2x_2''(t) &= \qquad\qquad\qquad\quad -k_2(x_2(t) - x_1(t) - \ell_2) + k_3(L - x_2(t) - \ell_3) \end{aligned}$$

配点 ばねののびの絶対値, 符号各 1 点 $\times 4$. 運動方程式の形 2 点.

3

$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = C^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{2}\, t - \theta^{(1)}) + C^{(2)} \begin{pmatrix} +1 \\ -2 \end{pmatrix} \cos(2\sqrt{2}\, t - \theta^{(2)})$. ($C^{(1)}, C^{(2)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}$ は任意定数)

配点 解の形 (ベクトル × 三角関数)4 点, 固有周波数 1 点 $\times 2$, 固有ベクトル 2 点 $\times 2$.

4

固有モードは $\boldsymbol{g}^{(2)}(t, \theta^{(2)}) = \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{6}\, t - \theta^{(2)})$. 固有周波数は, $\omega = \sqrt{2}, \sqrt{6}, 2\sqrt{2}$.

配点 固有周波数 2 点 $\times 2$, 固有ベクトル 3 点, 固有モード 3 点.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

5

$x = 9$ は不安定な平衡点．$x = 0$ は, $x < 0$ にずれたときに離れていくのでやはり不安定.

配点　平衡点の位置 3 点 $\times 2$, $x = 9$ の安定性 4 点.

講評　平衡点と書いてあったら最初にでてきた式を 0 とおく, んじゃなくて日本語を読もうよ〜$F'(0) = 0$ なので, 安定か不安定かは場合によるわけですが, $U(x)$ の形で考えると不安定とわかります．しかし, 今回の採点では $x = 0$ の安定性については採点対象にしていません.

6

周期 $T = 3^{-1/4} \cdot 4\pi$.

配点　$F'(\pi/3)$ 5 点, 周波数 4 点, 周期 1 点.

7

1. $x_1 = \ell, x_2 = 3\ell$.
2.

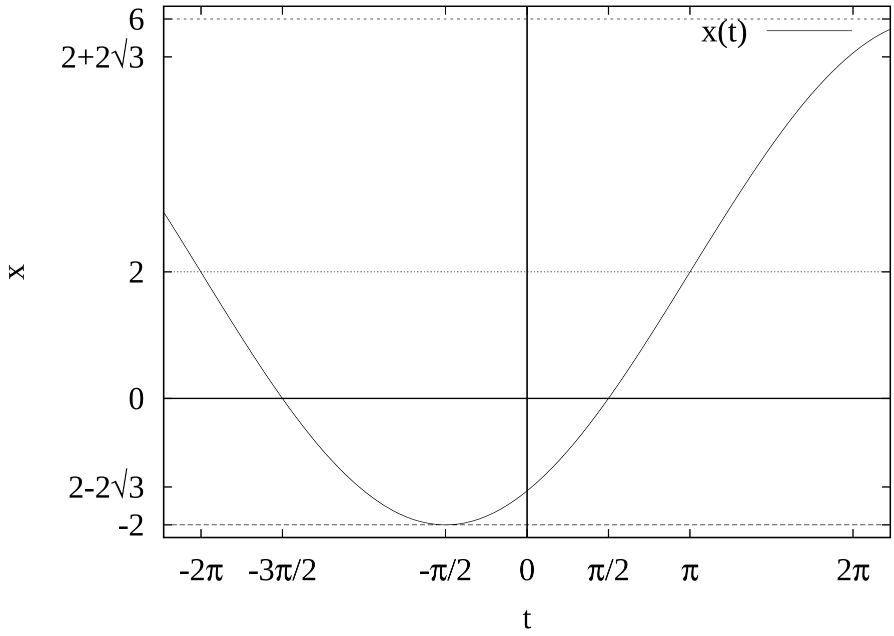
$$\begin{aligned} u_1''(t) &= +\,2u_1(t) - u_2(t) \\ u_2''(t) &= -\,u_1(t) + 2u_2(t) \end{aligned}$$

配点　平衡点の位置 3 点 $\times 2$, 運動方程式 2 点 $\times 2$.

講評　行列がでてきたら固有値を求める, んじゃなくて日本語を読もうよ〜

8

1. 振幅 4, 周期 6π.



2.

配点　振幅 2 点, 周期 2 点, 図で, 平衡点と振幅 2 点, 周期 2 点, 初期位相 2 点.

講評　振幅, 周波数, 周期は定義によりつねに正です.

9

$$x(t) = 5\cos(2t) + 2.$$

配点　周波数 4 点, 非斉次解 3 点, 初期条件 3 点.

講評　物理数学 II の問題なんだけどな〜 左辺を t, 右辺を x で積分しちゃうのは罪が重い. いつでも両辺には同じ仕打ちを.

　非斉次方程式の特解として, 右辺の非斉次項をそのまま持ってきちゃうひとがけっこう板のは残念. 右辺と似た形で, $x(t) = x_0$ (t に関して定数) として x_0 を決める作戦で行けばいいのに.

10

$$\boldsymbol{u}(t) = -\sqrt{3}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\sin(t) - \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)\sin(\sqrt{3}t)$$

配点　任意定数に関する連立 1 次方程式 2 点. 解 8 点.

講評　最初に三角関数の加法定理を使って分解して, 未知定数の連立 1 次方程式にしちゃえば難しくありません.