現象の数学 B ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] 配布: 2013-01-29 Tue 更新: Time-stamp: "2013-02-03 Sun 10:59 JST hig"

ファイナルトライアル参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

過程不要

あなたは, ある企業への就職のための面接を受けました. そこで, 「最近, 大学ではどんな勉強していますか?」という問に対して, 何を間違ったか「現象の中の数学 B とかですかね〜」と答えてしまいました. すると面接官が食いついてきて「それどんな科目? その科目勉強するとどんなことできるようになるの?」とさらに質問されてしまいました. 内定をもらうために有利そうな 100 文字以上 150 文字以下の答を日本語で書いてください. なお, 面接官は, 文系の管理職で, 真面目そうで, 冗談は通じなさそうです.

採点の基準: 授業に対するお世辞は求めていません. 授業に出席していない面接官に事実をわかりやすく伝えられている解答を期待します.

2

2.1

過程不要

N 物体の連成振動および波動 (弦の振動) について, 正しいものの番号をすべて挙げよう.

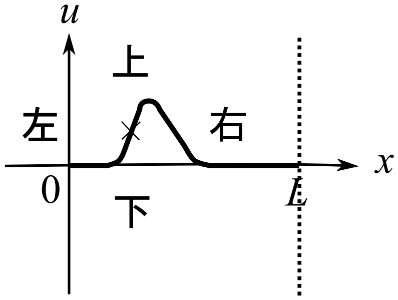
1. N 物体の連成振動, 波動とも, 無限個の固有モードが存在する
2. N 物体の連成振動, 波動とも, 一般解は固有モードの重ね合わせで書ける.
3. 波動の固有モードでは, 波数と固有周波数は正比例する
4. N 物体の連成振動の固有モードでは, 波数と固有周波数は正比例する
5. 波動の固有モードは, 時間的振動が速いものほど, 節 ($\forall t\ u(x,t)=0$ となる x) の個数が多い.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

2.2

過程不要

(授業で扱った) 波動方程式で記述される, 区間 $0 \leq x \leq L$ のゴムでできた弦の運動を考える. 時刻 $t = 0$ には, 弦は図の形 (折れ線の折れている点を丸めたもの) をしていて, 静止していた. 図の X 印の位置 (線分の途中) にインクで印をつけておいた. この印は, 時刻 $t = 0$ 以降のしばらくの時間帯, どちらの向きに動くか. 下からひとつ選び, **簡単な理由とともに**答えよう.



1. 上
2. 下
3. 左
4. 右
5. しばらく動かないままの時間帯がある

3

波動方程式と固定境界条件

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \ (0 < x < L), \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0$$

を考える. ここで $v > 0$ は定数である.

初期条件 $u(x,0) = 2\sin(\frac{2\pi}{L}x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -\sin(\frac{7\pi}{L}x)$ を満たす解を求めよう.

4

過程不要

波動方程式と固定境界条件

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \mathbf{3^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \ (0 < x < L), \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0$$

を考える (**定数が具体的な数値で書いてあることに大注意**)

波数 $p = \frac{4\pi}{L}$ を持つ固有モードの, 固有周波数, 固有モードを答えよう.

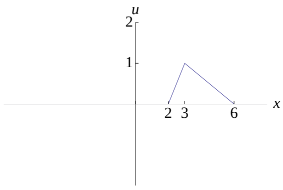
5

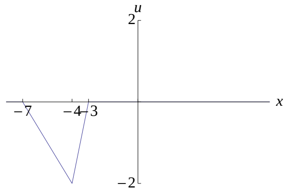
過程不要

定数 $v = 2$ とする．実軸上の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

の解 $u(x,t) = f(x+vt) + g(x-vt)$ を考える．

ここで, $f(z) =$ 

, $g(z) =$ 

とする．

1. $t = 1$ のとき, $u(x,t)$ のグラフを, 横軸 x, 縦軸 u で描こう．
2. $t = 3/2$ のとき, $u(x,t)$ のグラフを, 横軸 x, 縦軸 u で描こう．

6

関数 $u(t) = 2\cos(6t) - 2\cos(4t)$ のグラフを, 横軸 t 縦軸 u で, $0 \leq t \leq \pi$ の範囲で, 和積公式を利用して描こう．

最終的な図だけでなく, 描くのに使った補助線や包絡線を残そう．振幅や速い振動遅い振動の周期がわかるように, t, u 軸上に主な値を記そう．

7

過程不要

$N = 5$ 物体の連成振動をあらわす微分方程式

$$mu_n'' = +\,ku_{n-1} - 2ku_n + ku_{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots, 5 (= N))$$

を考える．k, m は定数, u_n は n 番目の物体の変位．ただし, $u_0 = u_{N+1} = 0$, すなわち両端のばねは壁に固定されているとする．

小さい方から数えて 4 番目の固有周波数と, 対応する固有モードを求めよう．ただし, N 物体の連成振動の固有周波数, 固有モード, 分散関係などの公式を使ってよい．

8

連成振動を表す, $\boldsymbol{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}$ についての微分方程式系

$$\boldsymbol{u}''(t) = -\begin{pmatrix} +6 & -1 & 0 \\ -4 & +4 & -2 \\ 0 & -2 & +6 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t)$$

を考える．この連成振動には, 固有周波数 $\omega = \sqrt{2}$ の固有モードが存在するか．存在するならその固有モード $\boldsymbol{g}(t, \theta)$ を答えよう．これ以外の固有モードや一般解を最終的な答に含めないこと．

9

連成振動を表す $u_1(t), u_2(t)$ についての微分方程式系

$$
\begin{aligned}
u_1''(t) &= -\,3u_1(t) - 2u_2(t), \\
u_2''(t) &= \quad\; -u_1(t) - 2u_2(t)
\end{aligned}
$$

を考える．一般解を求めよう．

10

2 物体の連成振動の一般解 $\boldsymbol{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ が

$$
\boldsymbol{u}(t) = C^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(t - \theta^{(1)}) + C^{(2)} \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(2t - \theta^{(2)})
$$

で与えられる．$C^{(1)}, C^{(2)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}$ は任意定数である．

初期条件

$$
\boldsymbol{u}(0) = \begin{pmatrix} +\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}'(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ +2 \end{pmatrix}
$$

を満たす解 $\boldsymbol{u}(t)$ を求めよう．

現象の数学 B ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2013-01-29 Tue 更新: Time-stamp: "2013-02-03 Sun 10:59 JST hig"

配点 計 100 点.

1

唯一の正解はありません.

配点 必要字数だけ書かれている 4 点. 振動 (3 点), 波動 (3 点) に触れられている. 偏微分方程式, 常微分方程式系などの見方での説明 (3 点). 物理数学と差別化できていない力学の説明 (他の加点がないとき 2 点). 最大計 10 点.

講評 白紙の人がけっこういたのは残念. 何で〜? この科目に限らず, 1 個の科目の履修が終わったときには自問自答することをお奨めします. 卒業までには 60 個くらい文がたまるってことだよね.

2

2.1

2,3,5

配点 正誤各 1 点 x5=5 点

2.2

5. しばらく動かないままの時間帯がある

配点 正答 3 点理由 2 点

講評 正答率低かった…三角形の波が台形になってくってクリッカーとデモでやったんだけどな〜

3

$u(x,t) = 2\sin(\frac{2\pi}{L}x)\cos(\frac{2\pi v}{L}t) - \frac{L}{7\pi v}\sin(\frac{7\pi}{L}x)\sin(\frac{7\pi v}{L}t).$

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

配点　10 点

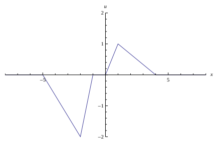
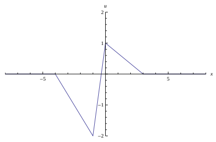
4

分散関係 $\omega = pv$ より, 固有周波数 $\frac{12\pi}{L}$. 固有モード $g(x,t;\theta) = \sin(\frac{4\pi}{L}x)\cos(\frac{12\pi}{L}t - \theta)$.

配点　固有周波数 4 点, 固有モード 6 点, 計 10 点.

講評　N 物体の固有モードの話と混ざった人がけっこういました. 去年のファイナルトライアルにあったから? これ授業中の Quiz にあったんだけどな〜

5

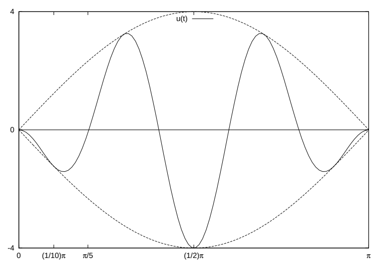
1. 
2. 

配点　1,2 各 5 点計 10 点.

講評　$v = 2$ を読み落としたひとがけっこういたのは残念. 2 では, 重なりがないと, チェックしたいポイントがチェックできないので $v = 1$ の人は 0 点になってます.

6

和積公式より $x(t) = 4\sin(t)\sin(5t)$.



配点　和積公式 2 点, 遅い単振動 4 点, 速い単振動 4 点, 計 10 点.

講評　ほとんど描けてて惜しい誤りとしては, $0 \le t \le \frac{1}{10}\pi$ で $u(t)$ と包絡線 $\pm 4\sin(t)$ が重なっちゃってるような描き方があります. 和積公式を知らなくても, $u(t) = -10(t-0)^2 + \cdots$ のようにテイラー展開できるので, $t = 0$ での傾きは 0 で放物線っぽく出て行きます. $t = \frac{1}{10}\pi$ で初めて 2 つの曲線は接します.

7

小さい方から数えて 4 番目の固有周波数は, 波数 $p^{(4)} = \frac{4}{5+1}\pi$ を用いて,

$$\omega^{(4)} = 2\sqrt{\tfrac{k}{m}}\sin\tfrac{p^{(4)}}{2} = 2\sqrt{\tfrac{k}{m}}\sin\tfrac{\pi}{3} = 2\sqrt{\tfrac{k}{m}}\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\tfrac{3k}{m}}.$$

固有モードは

$$\boldsymbol{g}^{(4)}(t,\theta^{(4)}) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\tfrac{3k}{m}}\,t - \theta^{(4)}\right).$$

定数倍して,

$$\boldsymbol{g}^{(4)}(t,\theta^{(4)}) = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\tfrac{3k}{m}}\,t - \theta^{(4)}\right).$$

でもよい.

配点　固有周波数 4 点, 固有ベクトル 4 点, 固有モードの形 2 点, 計 10 点.

8

$\boldsymbol{g}(t,\theta) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)\cos(\sqrt{2}t - \theta)$. ($\theta \in \mathbb{R}$ は任意定数)

Remark　固有周波数か?=固有値か?=特性多項式を満たすか? がんばって因数分解して全部の解を求めなくても, $\lambda = 2$ を代入して 0 になるかならないかチェックすればいいんじゃない?(因数定理と言ってもいい)

逆に '解でないことを示せ' って言われたら, まず全部の解を求めたりする?

ちなみに最短距離の解法は, $(2E - K)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ を解いて, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ な解がみつかればそれが固有モード, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ となるなら解じゃないってこと.

配点　存在 3 点, 固有ベクトル 4 点, 固有モードの形 3 点, 計 10 点.

講評　固有周波数か?=固有値か?=特性多項式を満たすか? がんばって因数分解して全部の解を求めなくても, $\lambda = 2$ を代入して 0 になるかならないかチェックすればいいんじゃない?(因数定理と言ってもいい)

逆に '解でないことを示せ' って言われたら, まず全部の解を求めたりする?

ちなみに最短距離の解法は, $(2E - K)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ を解いて, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ な解がみつかればそれが固有モード, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ となるなら解じゃないってこと.

9

$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = C^{(1)}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\cos(t - \theta^{(1)}) + C^{(2)}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\cos(2t - \theta^{(2)})$.
($C^{(i)}, \theta^{(i)} \in \mathbb{R}$ は任意定数)

配点　固有値各 2 点, 固有ベクトル各 2 点, 一般解の形 2 点, 計 10 点.

10

$$\boldsymbol{u}(t) = \left(\begin{smallmatrix}+1\\-1\end{smallmatrix}\right)(\sqrt{3}\cos(2t) - \sin(2t)) = 2\left(\begin{smallmatrix}+1\\-1\end{smallmatrix}\right)\cos(2t - \tfrac{11}{6}\pi)$$

配点　$A = C\cos -\theta$, $B = C\sin(-\theta)$ 相当各 2 点, C, θ に直す, または $\boldsymbol{u}(t)$ 2 点, 計 10 点.

講評　$\boldsymbol{u}(t)$ を求めろって言われてるんだから, 自分で $A\cos + B\sin$ っておいて求めればいいわけで, 難しい C, θ で答える義理はない…C, θ で答えてもいいけど.