

物体 1 個ばね n 個

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B L02(2012-10-02 Tue)

今日の目標

- ① 初期条件のもとで単振動の $x(t)$ のグラフを描けるようになる
- ② 物体 1 個ばね n 個のときに運動方程式を立てられるようになる



<http://hig3.net>

プレテスト講評

- 1,2,3,4 各 25 点, 計 100 点.
- 1,2 は復習問題, 3,4 はこのコース (の前半) でできるようになる問題.
- 最初の計画: 25+25+0+0 点の人を 100 点にもっていく
- 平均点: $7.5 + 10.6 + 0.8 + 0.3 = 17.5$.
- 再履修で点が悪かった人は自己省察しよう
- やってよかった

講評 1 25 点の人がけっこういた

講評 2 数式より日本語が大事. 何を求めるって?

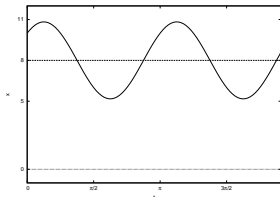
講評 3 $x'' + y'' = 0$ に気づいた人は立派. 力学で 2 物体の重心の運動方程式ってやった?

講評 4 n 個の物体があるときの運動方程式は n 個ある (力学)

- 本来 3 年生がだれでもとれる科目. あきらめたり甘く見たりせずに勉強しよう.

Quiz 解答:単振動のグラフ

$$x(t) = 2 \cos 2t + 2 \sin 2t + 8 = 2\sqrt{2} \cos\left(2t - \frac{1}{4}\pi\right) + 8$$



Quiz

横軸 t 縦軸 x で $0 \leq t \leq 2\pi$ のグラフを描こう (あとで)

この $x(t)$ のグラフを描こう!

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \underbrace{C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)}_{\text{斉次方程式の一般解}} + \underbrace{\ell}_{\text{非斉次方程式の特解}} \\
 &= \sqrt{C^2 + D^2} \left(\cos \omega t \frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}} + \sin \omega t \frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}} \right) + \ell \quad (\text{加法定理}) \\
 &= A \cos(\omega t - \theta) + \ell
 \end{aligned}$$

θ は、 $\cos \theta = \frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}}$, $\sin \theta = \frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}}$ となるような $\theta \in \mathbb{R}$ を選んだ。

今の場合、 $x(t) = -\cos 3t + \sqrt{3} \sin 3t + 4 =$

- $A > 0$

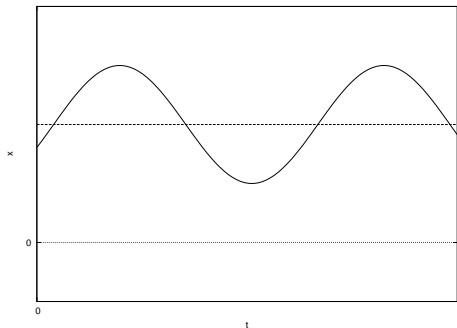
- ω

- $T = \frac{2\pi}{\omega}$

- $f = \frac{1}{T}$

- $\omega t - \theta$

- $-\theta$

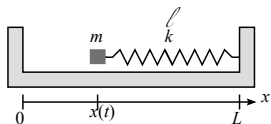


プレテスト returns

ばねの復元力 (フックの法則)

● 力の大きさ $= k \times |\text{のび}|$.

● 力の向き =



運動方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = \text{$$

復習 $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$ の一般解は, $x(t) = A \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \theta)$. (A, θ は積分定数)

周波数 $\omega = \sqrt{k/m}$

ばね定数 k が大きいほど 振動する. 周期は

Quiz(ばねの並列つなぎ)

最初はばね (ばね定数 k 自然長 l) 1 本だった. 同じばねをもう 1 本重ねて追加すると, 周波数は何倍になる?

- ① 2 倍
- ② $\sqrt{2}$ 倍
- ③ 1 倍
- ④ $1/\sqrt{2}$ 倍
- ⑤ $1/2$ 倍

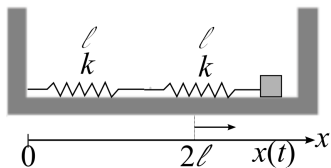
寄り道: 同じばね 2 個直列

物理のり

でないと ちょっと説明しづらい...

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = \boxed{}$$

なぜ?



Quiz(ばねの直列つなぎ)

最初はばね (ばね定数 k 自然長 l) 1 本だった. その先に同じばねをもう 1 本つないで延長すると, 周期は何倍になる?

- ① 2 倍
- ② $\sqrt{2}$ 倍
- ③ 1 倍
- ④ $1/\sqrt{2}$ 倍
- ⑤ $1/2$ 倍

超古代文明 ‘物理実験’ では知られていた!

ばね定数 k , 断面積 S , 長さ ℓ の関係

$$k = E \times \frac{S}{\ell}$$

E : ばねの形や大きさによらず材質だけで決まる比例定数 ‘Young 率’.

- 並列にばねを増やすのは, 面積を和にすることに相当. $E \times \frac{(S_1+S_2)}{\ell}$.
- 直列にばねを増やすのは, 長さを和にすることに相当. $E \times \frac{S}{\ell_1+\ell_2}$.

フックの法則の別の形 $\sigma = E\epsilon \rightsquigarrow$ 復元力 $F = -\sigma S = -\frac{ES}{\ell}(x - \ell)$.

- σ : 応力の大きさ=力の大きさ/面積
- E : Young 率
- ϵ : ひずみ = $\frac{\text{のび}}{\text{長さ}} = \frac{x-\ell}{\ell}$ 物体が伸縮の比率

Quiz(ばねを両側)

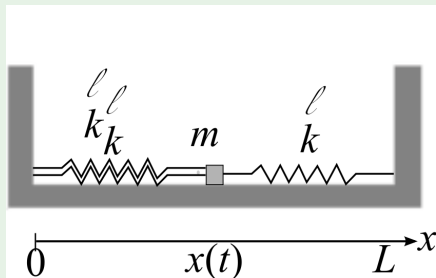
最初は物体はばね (ばね定数 k 自然長 ℓ) 1 本につながれていた。物体の反対側にも同じばねをつけると、周波数は何倍になる?

- ① 2 倍
- ② $\sqrt{2}$ 倍
- ③ 1 倍
- ④ $1/\sqrt{2}$ 倍
- ⑤ $1/2$ 倍

Quiz(ばね複数の振動)

図の状況で、 k はばね定数、 ℓ はばねの自然長、 $L = 2\ell$ は壁から壁までの距離.

- ① 運動方程式を立てよう.
- ② 振動の周期を求めよう.



連絡

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小形 p.1-p.11

次回の予習ポイント

- テイラー展開
- ポテンシャルエネルギー
- 微分方程式系の平衡点

微積分・演習 I

物理数学 II, 力学, ベクトル解析

数理モデル II

予習復習問題

明日水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね～