連成振動と基準座標

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L05(2012-10-30 Tue)

今日の目標

1. 2 個以上の物体とばねがあるとき (連成振動) に運動方程式を立てられる
2. 連成振動の微分方程式を基準座標の方法で解ける

http://hig3.net

Quiz 解答:重力+ばねの運動方程式

1. $mx'' = mg - k(x - \ell)$.
2. $F(x_0) = mg - k(x_0 - ell) = 0$ より, $x_0 = \frac{mg}{k} + \ell$.
3. $F'(x_0) = -k < 0$ より, $x_0 = \frac{mg}{k} + \ell$ は安定な平衡点.
4. 微小振動の運動方程式は, $mx'' = -k(x - x_0)$. よって, 周波数は $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, 周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Quiz 解答:微小振動の周期を求めよう!

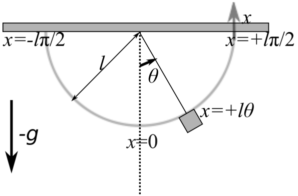
1. $3x''(t) = \sqrt{3} - 2\cos x$.
2. $F(x) = \sqrt{3} - 2\cos x = 0$ を解いて, 平衡点は $x = \pm\frac{1}{6}\pi$.
3. $F'(x) = +2\sin x$. $F'(+\frac{1}{6}\pi) = 1 > 0$, $F'(-\frac{1}{6}\pi) = -1 < 0$ より, 安定な平衡点は $x = -\frac{1}{6}\pi$.

Quiz 解答:微小振動の周期を求めよう!

1. $x'' = \mathrm{e}^{-6x} - \mathrm{e}^{-2x}$.
2. $F(x_0) = 0$ となる x_0 をみつければよい. $\mathrm{e}^{-6x_0} - \mathrm{e}^{-2x_0} = 0$ より $\mathrm{e}^{-2x_0}(\mathrm{e}^{-4x_0} - 1) = 0$. よって $\mathrm{e}^{-4x_0} = 1$ なので $x_0 = 0$.
3. $F'(x) = -6\mathrm{e}^{-6x} + 2\mathrm{e}^{-2x}$ より, $F'(x_0) = F'(0) = -4 < 0$. よって安定.
4. テイラー展開の 2 次の項を無視する近似で, 運動方程式は
$$x'' = F(x_0) + \frac{1}{1!}F'(x_0)(x - x_0)$$
すなわち
$$x'' + 4(x - 0) = 0$$
これは単振動の方程式. $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ を代入してみると,
$$(-\omega^2 + 4)A\cos(\omega t + \phi) = 0$$
より $\omega = 2$. 解は
$$x(t) = A\cos(2t + \phi)$$
よって周期は $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

微小振動の例:振り子

運動方程式. 角度 $\theta(t)$ $(0 \le \theta(t) < 2\pi)$



$$m\ell^2 \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\ell \sin\theta(t)$$

導出 1

回転の運動方程式 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{N}$.　力学

角運動量 $L_z = (m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})_z = m\ell(\ell\theta)' \times \sin\frac{\pi}{2}$.

力のモーメント $N_z = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F})_z = -mg \times \ell \times \sin\theta$.

導出 2

ふつうの運動方程式 $m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F(x(t))$.　物理数学 II

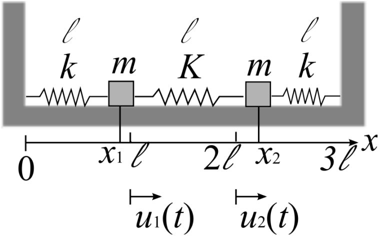
$x = \boxed{}$, $F_x = \boxed{}$.

導出 3

解析力学をつかうとほぼ自動的　応用数理 B

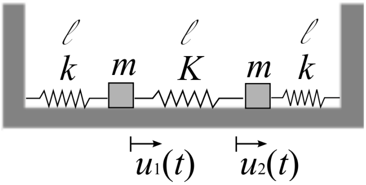
連成振動の運動方程式

$$mx_1'' = -k(x_1 - \ell) + K(x_2 - x_1 - \ell)$$
$$mx_2'' = -K(x_2 - x_1 - \ell) + k(3\ell - x_2 - \ell)$$



2 物体以上あるときの平衡点:
力の
合計 $F_1(x_1, x_2) = F_2(x_1, x_2) = 0$ の解.

平衡点からの変位 $u_1 = x_1 - \ell, u_2 = x_2 - 2\ell$.

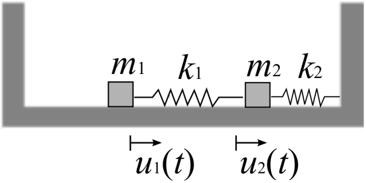


右辺に定数項がないのは自然.
だって

変位についての, こ
の運動方程式がいきなり書けるように.

Quiz(連成振動の運動方程式)

図の場合に運動方程式をたてよう. u_1, u_2 は平衡点からの変位.



Quiz(連成振動の運動方程式)

1 次元の運動で, 各物体の平衡点からの変位 u_i を変数としたとき, 連成振動の運動方程式について, あってるものの番号を (何個でも) 答えよう.

1. 運動方程式の個数と変位の個数は同じ
2. 運動方程式の個数と物体の個数は同じ
3. 運動方程式の個数とばねの個数は同じ
4. 平衡点は $u_i = 0$
5. 平衡点は $u_i =$ 自然長
6. 平衡点は $u_i =$ (i までのばねの自然長の合計)

連絡

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題 小形 p.18-32
次回の予習ポイント

- 2 物体系の運動方程式　力学
- 2×2 行列の行列式　線形代数
- 2×2 行列の固有値固有ベクトル　線形代数

予習復習問題毎週水昼-月夜に e ラーニングシステムで予習復習問題やってね〜
添削作戦にリベンジ追加 3 ピーナッツ．リメディアル物理学の特定のテスト (e ラーニングシステムから)．いまなら公式暗記じゃなく解けるはず．