

3 物体の固有周波数と固有モード

樋口さぶろお

龍谷大学工学部数理情報学科

現象の数学 B L07(2012-11-13 Tue)

今日の目標

- 1 連成振動の解を, 固有モードの方法で求められる.

再履修の人に注意: 今年度は基準座標は後回し, または省略します. θ_1 と書いていたものが $\theta^{(1)}$ になります.



<http://hig3.net>

Quiz 解答:連成振動の固有モードを用いた解法

微分方程式は

$$\mathbf{x}'' = -K\mathbf{x}, \quad K = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}'(0) = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

K の固有値固有ベクトルは $\lambda = 1, 5$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix}$ なので, 固有周波数 $\omega = 1, \sqrt{5}$. 固有モードは,

$$\mathbf{g}^{(1)}(t, \theta^{(1)}) = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(t - \theta^{(1)}) \quad \text{と} \quad \mathbf{g}^{(2)}(t, \theta^{(2)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{5}t - \theta^{(2)})$$

一般解は固有モードの線形結合で

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(t - \theta^{(1)}) + C^{(2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{5}t - \theta^{(2)})$$

ここで $C^{(1)}, C^{(2)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}$ は任意定数.

初期条件より, $C^{(1)} = 0, C^{(2)} = \frac{3}{\sqrt{5}}, \theta^{(1)} = \text{任意}, \theta^{(2)} = \pi/2$.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{5}t).$$

Quiz(連成振動の固有モード)

次の1のうち、物体番号1に対応するのはどれ(何個でも)?

- ① x_1
- ② $\mathbf{a}^{(1)}$
- ③ $C^{(1)}$
- ④ u_1
- ⑤ $\theta^{(1)}$
- ⑥ $\mathbf{g}^{(1)}$
- ⑦ $a_1 (\mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ の})$

4つの独立な解, という言い方

加法定理を使うと,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= C^{(1)} \mathbf{a}^{(1)} (\cos(\omega^{(1)}t) \cos \theta^{(1)} + \sin(\omega^{(1)}t) \sin \theta^{(1)}) \\ &\quad + C^{(2)} \mathbf{a}^{(2)} (\cos(\omega^{(2)}t) \cos \theta^{(2)} + \sin(\omega^{(2)}t) \sin \theta^{(2)}) \\ &= A^{(1)} \mathbf{a}^{(1)} \cos(\omega^{(1)}t) + B^{(1)} \mathbf{a}^{(1)} \sin(\omega^{(1)}t) \\ &\quad + A^{(2)} \mathbf{a}^{(2)} \cos(\omega^{(2)}t) + B^{(2)} \mathbf{a}^{(2)} \sin(\omega^{(2)}t). \end{aligned}$$

という4つの独立な解の線形結合とも思える. 2変数, 2階だから4個の任意定数.

$\cos(\omega t - \theta)$ と置かって物理数学II, 数理モデル基礎Iでやってたのの進化バージョン

よく, $x(t) = e^{\lambda t}$ とおいてみて λ を決める, ってやってたでしょ.

今の場合,

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{a} \cos(\omega t - \theta) = \mathbf{a} \frac{e^{i\omega t - i\theta} + e^{-(i\omega t - i\theta)}}{2} = \mathbf{u} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}).$$

● λ と ω は $i = \sqrt{-1}$ 倍違うだけ. (この λ は行列の固有値じゃない)

Quiz(連成振動の固有周波数, 固有モード)

連成振動を表す x_1, x_2 についての微分方程式系

$$x_1'' = -2x_1 + 2x_2$$

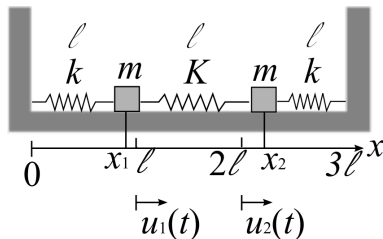
$$x_2'' = -x_1 - 5x_2$$

の固有周波数, 固有モードを求めよう. 一般解を求めよう. 初期条件 $x_1(0) = 2, x_2(0) = 0, x_1'(0) = x_2'(0) = 0$ を満たす解を求めよう.

固有周波数/固有モードってけっきょく？

図で $K = k$ とする. 先週求めた解は,

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = C^{(1)} \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t - \theta^{(1)}\right) + C^{(2)} \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k+2K}{m}} t - \theta^{(2)}\right)$$



固有周波数, 固有モードって結局どういう意味?

2物体の連成振動 (一般の初期条件)

2物体の連成振動 (固有振動)

3 物体の連成振動

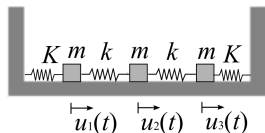
図で $K = 2k$.

(平衡点からの) 変位: u_1, u_2, u_3

$$mu_1'' = -2ku_1 - k(u_1 - u_2)$$

$$mu_2'' = +k(u_1 - u_2) - k(u_2 - u_3)$$

$$mu_3'' = +k(u_2 - u_3) - 2ku_3$$



固有モードを使って解こう!

Quiz(固有モードの個数)

固有モードは何個出てくるはず?

- ① 1 個
- ② 2 個
- ③ 3 個
- ④ 4 個
- ⑤ 5 個
- ⑥ 6 個

3 物体の連成振動のシミュレーション

Quiz(3 × 3 行列の固有ベクトル)

3 × 3 行列

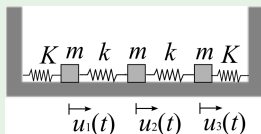
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の, 固有値 0 の固有ベクトルはどれ (とどれ)?

- ① $\begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- ② $\begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix}$
- ③ $\begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ④ $\begin{pmatrix} +1 \\ -2 \\ +1 \end{pmatrix}$

Quiz(3点の連成振動)

図のように4つのばね(ばね定数 $K = k = 1$)で結ばれた質量 $m = 1$ の3物体が、一直線上で運動している。時刻 t における位置 $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ は、それぞれの物体の(平衡点=つりあいの位置からの)変位である。



- ① u_1, u_2, u_3 について運動方程式をたてよう。
- ② 固有周波数を求めよう。
- ③ 固有モードを求めよう。

連絡

ACM-ICPC 国際大学対抗プログラミングコンテストに出よう

<http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/icpc/>

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小形 p.42-47

- 3 物体の連成振動 小形 3 章演習問題 [1](p.57),
- 3 物体の連成振動 小形 3 章演習問題 [2](p.57)

予習復習問題 水から月曜夜までに e ラーニングシステムでやってね～次の締切は 2012-11-19 月夜.

プチテストやります!

日時 2012-11-20 火 3, 90 分.

場所 いつもと同じ

配点 100 点 30 ピーナッツ.

参照 なし.

公欠 基準と届が独自です. Web ページの病欠・公務欠席等の届出とそれを考慮する (しない) 方法参照.

出題計画

- 物体 1 個, ばね 1 個または複数のときに運動方程式を立てよう (L02)
- 物体 1 個, ばね 1 個または複数のときに運動方程式を解こう (L02)
- 式から単振動の振幅, 周期, 周波数, 正確なグラフを求めよう (L02)
- ばねとは限らない力について, 安定, 不安定な平衡点を見つけよう (L03)
- 安定な平衡点の近くでの微小振動の周波数, 周期を求めよう (L04)
- 物体 2 個, ばね複数のときに運動方程式を立てよう (L05)
- 物体 2 個, ばね複数のときに平衡点を見つけて運動方程式を変位で書こう (L05)
- 物体 2 個, ばね複数のときに固有周波数, 固有モードを求めて運動方程式を解こう (L06, L07)
- 物体 2 個, ばね複数のときに, 初期条件から一般解の任意定数を決めよう (L06, L07)
- 物体 3 個, ばね複数のときに固有周波数, 固有モードを求めて運動方程式を解こう (L07)