うなり

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L08(2012-11-27 Tue)

今日の目標

1. 初期条件のもとで, 2 個の物体の連成振動の解を求められる
2. うなりのグラフが描ける
3. うなりの周波数を求められる

http://hig3.net

Quiz 解答:連成振動の固有周波数, 固有モード

微分方程式は

$$\boldsymbol{x}'' = -K\boldsymbol{x}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

とかける.

K の固有値固有ベクトルは $\lambda = 3, 4$, $\boldsymbol{u} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ なので, 固有周波数 $\omega = \sqrt{3}, 2$. 固有モードは,

$$\boldsymbol{g}^{(1)}(t,\theta) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \cos(\sqrt{3}t - \theta) \quad \text{と} \quad \boldsymbol{g}^{(2)}(t,\theta) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \cos(2t - \theta)$$

一般解は固有モードの線形結合で

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C^{(1)} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \cos(\sqrt{3}t - \theta^{(1)}) + C^{(2)} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \cos(2t - \theta^{(2)})$$

ここで $C^{(1)}, C^{(2)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}$ は任意定数.

初期条件より,

$$\boldsymbol{x}(t) = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \cos(\sqrt{3}\, t) + \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ +2 \end{smallmatrix}\right) \cos(2t)$$

Quiz 解答:3 点の連成振動

1. 運動方程式は,

$$
\begin{aligned}
mu_1'' &= -Ku_1 - k(u_1 - u_2) \\
mu_2'' &= \qquad\quad + k(u_1 - u_2) - k(u_2 - u_3) \\
mu_3'' &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + k(u_2 - u_3) - Ku_3
\end{aligned}
$$

2. $m = 1, k = K = 1$ より

$$
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} +2 & -1 & 0 \\ -1 & +2 & -1 \\ 0 & -1 & +2 \end{pmatrix}.
$$

3. K の固有値は, $\det(\lambda E - K) = 0$ を解いて, $\lambda = 2 - \sqrt{2}, 2, 2 + \sqrt{2}$. よって, 固有周波数は $\omega = \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

4. これらの λ に対応する固有ベクトルは, $(\lambda E - K)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ を解いて,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ +\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} s, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} s, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} s \qquad (s \in \mathbb{R})$$

よって, 固有モードはそれぞれ,

$$\boldsymbol{g}^{(1)}(t, \theta^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ +\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}t - \theta^{(1)}\right),$$

$$\boldsymbol{g}^{(2)}(t, \theta^{(2)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{2}t - \theta^{(2)}\right),$$

$$\boldsymbol{g}^{(3)}(t, \theta^{(3)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}t - \theta^{(3)}\right).$$

アンケート

プチテスト前にどんな勉強?

1. ノート, プリントを見直す
2. TA, チューターに質問する
3. Quiz を解き直す
4. Quiz の解答を読む
5. 模範解答を作ろうプロジェクトの問題を解く
6. 模範解答を作ろうプロジェクトに投稿された解答を読む
7. 過去のプチテストの問題を解く
8. 過去のプチテストの問題の解答を読む

アンケート

プチテスト 10 問のうち何問くらいが想定内でしたか?

1. 1 問または 0 問
2. 2 問
3. ⋮
4.
5.
6.
7.
8. ⋮
9. 9 問
10. 10 問

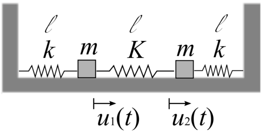
Quiz(連成振り子の運命)

2 個の物体の連成振り子の, 左側だけを持ち上げて手を放すと?

1. 左側の振り子が揺れ続ける
2. だんだん両側が同じように揺れるようになっていく
3. だんだん両側が反対に揺れるようになっていく
4. だんだん右側の振り子だけが揺れるようになっていく
5. 左側 $\to$ 右側 $\to$ 左側 $\to$ 右側 $\to \cdots$ と大きく揺れる側が交代する
6. 大爆発する

うなり

弱いばね K でつながった, 対称な 2 個の物体を考えよう ($K \ll k$).
固有周波数, 固有モードを求め, 初期条件 $u_1(0) = a, u_2(0) = u_1'(0) = u_2'(0) = 0$ のもとで運動を求めよう.



どんなグラフ?

和積公式 (暗記するな危険)

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\beta &= +\,2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -\,2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\\
\sin\alpha + \sin\beta &=\\
\sin\alpha - \sin\beta &=
\end{aligned}
$$

加法定理

$$
\begin{aligned}
\sin(A \pm B) &= \sin A\cos B \pm \cos A\sin B\\
\cos(A \pm B) &= \cos A\cos B \mp \sin A\sin B
\end{aligned}
$$

で, $A+B=\alpha, A-B=\beta$ と思って和や差を作って導く方が安全.
右辺に係数 2 が必要なのは当然. 左辺は最大 2, 右辺の $\cos\cos$ は最大 1 の量だから.

$$\omega^{(1)} = \sqrt{\tfrac{k}{m}} < \omega^{(2)} = \sqrt{\tfrac{k+2K}{m}}.$$

$$\begin{aligned} u_1(t) =& \tfrac{a}{2}[+\cos(\omega^{(1)}t) + \cos(\omega^{(2)}t)] = +a\cos\tfrac{\omega^{(1)}+\omega^{(2)}}{2}t\ \cos\tfrac{\omega^{(2)}-\omega^{(1)}}{2}t \\ u_2(t) =& \tfrac{a}{2}[+\cos(\omega^{(1)}t) - \cos(\omega^{(2)}t)] = +a\sin\tfrac{\omega^{(1)}+\omega^{(2)}}{2}t\ \sin\tfrac{\omega^{(2)}-\omega^{(1)}}{2}t \end{aligned}$$

固有周波数の差 (うなりの周波数)

$\omega_{\mathsf{beat}} = \omega^{(2)} - \omega^{(1)} = \sqrt{\tfrac{k+2K}{m}} - \sqrt{\tfrac{k}{m}} > 0$

固有周波数の平均 $\omega_{\mathsf{av}} = \frac{1}{2}(\omega^{(1)} + \omega^{(2)}) \simeq \sqrt{\tfrac{k}{m}}$ とおくと,

K が k に比べて小さい $\rightsquigarrow \omega^{(1)} \simeq \omega^{(2)} \simeq \omega_{\mathrm{av}} \gg \frac{1}{2}\omega_{\mathrm{beat}}$

$\boxed{}$単振動 $\omega_{\mathrm{av}} \gg \frac{1}{2}\omega_{\mathrm{beat}}$ $\boxed{}$単振動

$$\begin{aligned} u_1(t) =& a\cos(\omega_{\mathsf{av}}t)\cos(\tfrac{1}{2}\omega_{\mathsf{beat}}t) \\ u_2(t) =& \boxed{} \end{aligned}$$

Quiz(和積公式とうなり)

$x(t) = \cos 9t + \cos 7t$ の, 区間 $0 \leq t \leq 2\pi$ でのグラフを描こう.

うなり

2 つの物体をつなぐばね K が弱いとき (=2 つの固有周波数 $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}$ の差が小さいとき) に起きる.
うなりの周波数 $= \omega_{\text{beat}} = \left|\omega^{(1)} - \omega^{(2)}\right|$.

うなりの周期
$= \boxed{}$
$=$ 速い周期の振幅が最大になる時間間隔
$=$ 遅い単振動の周期の $\frac{1}{2}$ 倍 $= 2\pi/\omega_{\text{beat}}$

うなりのシミュレーション

2 物体の連成振動のシミュレーション (nbp)

http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/course/mathphb_2010/coupled2.html

うなりのシミュレーション (CDF)

http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/course/mathphb_2011/beat.cdf

うなりのサウンドファイル

http://homepage3.nifty.com/kuebiko/science/freestdy/NouUnari.htm

音叉によるうなりの動画

http://www.youtube.com/watch?v=BsG6zbdJbpA

Quiz(連成振動の固有モード)

2 個の物体の連成振動の固有モードについて, 正しいものすべてを選ぼう

1. 固有モードを時間の関数と見ると, 三角関数で表せる
2. 固有モードを 2 次元ベクトルとしてみると, つねに同じ方向を向いている
3. 固有モードの周波数は時間とともにだんだん減少していく
4. 固有モードの振幅は時間とともに増加, 減少を繰り返す
5. 各固有モードは, それぞれ, ただ 1 つの固有周波数を持つ

Quiz(うなり)

$x(t) = 2\cos 6t + 2\cos 8t$ のグラフを, 三角関数の和積公式を利用して $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲で描こう. x,t 軸の目盛を忘れずに記そう. 描くのに使った補助線を残そう.

連絡

ACM-ICPC 国際大学対抗プログラミングコンテストに出よう
http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/icpc/
今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題
小形 p.18-38

- うなり 小形 2 章演習問題 [5](p.39)
- うなり 小形 2 章演習問題 [6](p.39)
- うなり 小形 2 章演習問題 [7](p.39)

次回の予習ポイント

- 三角関数の半角の公式
- 三角関数の和積公式

予習復習問題
水から月曜夜までに e ラーニングシステムでやってね〜