波動方程式の初期値問題

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L12(2013-01-08 Tue)

今日の目標

1. 固定境界条件の波動方程式の一般解を書ける
2. 簡単な初期条件について, 初期値問題が解ける

http://hig3.net

Quiz 解答:波動方程式の固有モード

1. $f''(t) = -v^2(\frac{3\pi}{L})^2 f(t)$.
2. $u(\frac{1}{2}L, t) = -f(t)$ であることに注意すると,
   $f(0) = -\sqrt{3}, f'(0) = -\frac{3\pi v}{L}$.
3. 微分方程式を解くと, $f(t) = A\cos(\frac{3\pi v}{L}t - \theta)$. 初期条件から任意定数 A, θ を定めて, $f(t) = 2\cos(\frac{3\pi v}{L}t - \frac{7}{6}\pi)$.

波動方程式の固有モード

固定境界条件の波動方程式の固有モード

$$g(x,t;\theta) = \sin(px)\cos(\omega t - \theta) \qquad (\leftrightarrow g_n(t,\theta))$$

- p:波数. $p = \frac{\ell\pi}{L}$. $\ell \in \mathbb{Z}$ はモード番号.
- ω: 固有周波数. $\boxed{}$ $\omega = pv$ で定まる.

比較:連成振動 と 波動

	連成振動	波動
波数 p の現れ方	$\sin(pn)$	$\sin(px)$
p の値	$\frac{\ell\pi}{N+1}$	$\frac{\ell\pi}{L}$
ℓ の範囲	$\ell = 1, 2, \ldots, N$	$\boxed{?}$
波数の単位	無次元 (radian)	radian/m
分散関係	$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\frac{1}{2}p)$	$\omega = vp$

波動方程式の固有モードは何個ある?

$\ell \in \mathbb{Z}$ っていうけど, 本当にぜんぶいるの?

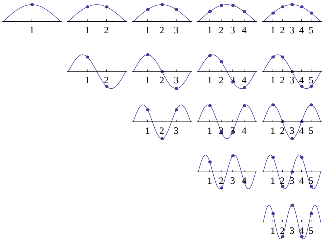
$$\sin(px) = \sin\left(\frac{\ell\pi}{L}x\right)$$

役立たず: $\boxed{\quad}$ $\sin(px) = 0$. ほしくない.

かぶってる: $\boxed{\quad}$. $C\sin(-px) = (-C)\sin(px)$.

結局, 自然数すべて. $g^{(\ell)}(x, t; \theta^{(\ell)})$, $\ell = 1, 2, 3, \ldots$.

比較 連成振動では $\boldsymbol{g}^{(\ell)}(t, \theta^{(\ell)})$, $\ell = 1, 2, \ldots, N$.



Quiz(波動方程式の固有モード)

固定境界条件の波動方程式の固有モードについて, 次のうち間違ってるのはどれ?

1. ω は p の三角関数で書ける
2. u は t の三角関数で書ける
3. 振動の (時間的) 周期が長いほど, 波数は大きい
4. 波数が大きいほど (時間的に) 速く振動する
5. 波数は固有周波数に比例する

Quiz(波動方程式の固有モード)

固定境界条件 $u(0,t)=u(7,t)=0$ のもとで, 区間 $0<x<7$ の波動方程式

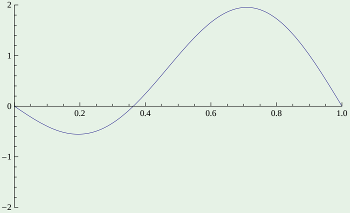
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=3^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad (0<x<7)$$

を考える. 波数が小さい方から数えて 2 番目,5 番目の固有モードを答えよう.

波動方程式の初期値問題

Quiz(波動の初期値境界値問題)

波動方程式に従う弦を, 下の形でそっと手を放したとき, 節 ($u(x,t)=0$ であるような x) はどっちに動く?



1. 左に動く
2. 動かない
3. 右に動く
4. 節が 2 個に分裂して左右に動く
5. 多数の節に分裂して大爆発する

固有モードで解はすべて?

そんなはずない!

$g^{(1)}(x,t;0) = \sin(\frac{\pi}{L}x)\cos(\frac{\pi v}{L}t)$,

$g^{(2)}(x,t;0) = \sin(\frac{2\pi}{L}x)\cos(\boxed{}\,t)$ はともに固有モード, よって解.

このとき, $\boxed{}$ も解 (一般に解の線形結合は解)

なぜなら, 波動方程式は線形だから.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(A\frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial t^2} + B\frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial t^2}\right) - v^2\left(A\frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial x^2}\right) \\
&= A\left(\frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial x^2}\right) + B\left(\frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial x^2}\right) \\
&= A\cdot 0 + B\cdot 0 = 0
\end{aligned}
$$

数理モデル基礎の線形**常**微分方程式のところで聞いたような話…

波動方程式の一般解

実は, (ある意味) 固有モードの線形結合で解はすべて.
つまり, 一般解は固有モードの線形結合.

固定境界条件の波動方程式の一般解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad (0 < x < L) \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$

の一般解は, 線形結合

$$u(x,t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} C^{(\ell)} g^{(\ell)}(x,t;\theta^{(\ell)}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} C^{(\ell)} \sin(p^{(\ell)} x) \cos(\omega^{(\ell)} t - \theta^{(\ell)})$$

$$= (\text{加法定理}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sin(p^{(\ell)} x)[A^{(\ell)} \cos(\omega^{(\ell)} t) + B^{(\ell)} \sin(\omega^{(\ell)} t)]$$

$p^{(\ell)} = \frac{\ell\pi}{L}$, $\omega^{(\ell)} = vp^{(\ell)} = \frac{\ell\pi v}{L}$, $\ell = 1, 2, 3, \ldots$.
$(C^{(\ell)}, \theta^{(\ell)}), (A^{(\ell)}, B^{(\ell)})$: 任意定数

霊感解法

Quiz (初期値境界値問題)

波動方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ を,

$$\text{固定境界条件} \quad u(0,t) = u(L,t) = 0,$$
$$\text{初期条件} \quad u(x,0) = F(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = G(x)$$

のもとで解け.

一般解は,

$$u(x,t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} [A^{(\ell)} \sin(p^{(\ell)} x) \cos(\omega^{(\ell)} t) + B^{(\ell)} \sin(p^{(\ell)} x) \sin(\omega^{(\ell)} t)]$$ と書ける. $(A^{(\ell)}, B^{(\ell)})$ 任意定数. この時点

で $\boxed{}$ OK

ここからが霊感解法

霊感で $A^{(1)} = 3, A^{(2)} = 9, A^{(3)} = 370, \dots, B^{(1)} = 0, B^{(2)} = 2, \dots$ などとうまく決めて,

$$u(x,t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} [A^{(\ell)} \sin(p^{(\ell)} x) \cos(\omega^{(\ell)} t) + B^{(\ell)} \sin(p^{(\ell)} x) \sin(\omega^{(\ell)} t)]$$

が初期条件

$$u(x,0) = F(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = G(x)$$

を満たすようにする. そうできれば, それが求める解.

Quiz(波動方程式の初期値問題)

関数 $u(x,t)$ は, 時刻 t, 位置 $0 \leq x \leq L$ の弦の変位を表す. 関数 $u(x,t)$ は波動方程式と固定境界条件

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0$$

を満たす.
初期条件 $u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -2\sin(\frac{3\pi}{L}x)$ を満たす解を求めよう.
フーリエ級数変換を利用しないで, 霊感解法で直観的にやっていい.

もっと説得力のある霊感解法

Quiz

固定境界条件の波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ を，次の初期条件のもとで解け.

$$u(x,0) = -2\sin(\tfrac{\pi}{L}x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 3\sin(\tfrac{\pi}{L}x).$$

$\boxed{}$のお告げ: $A_2 = A_3 = \cdots = 0, B_2 = B_3 = \cdots = 0.$ $A_1 = ?$, $B_1 = ?$

$$u(x,t) = \sin(\tfrac{\pi}{L}x)[A_1\cos(\tfrac{\pi v}{L}t) + B_1\sin(\tfrac{\pi v}{L}t)] \quad \text{とおくと}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sin(\tfrac{\pi}{L}x)[-A_1\tfrac{\pi v}{L}\sin(\tfrac{\pi v}{L}t) + \tfrac{\pi v}{L}B_1\cos(\tfrac{\pi v}{L}t)]$$

Quiz(波動の初期値境界値問題)

固定境界条件 ($u(0,t) = u(L,t) = 0$) の波動方程式を, 次の初期条件のもとで解こう.

$$u(x,0) = -2\sin(\tfrac{\pi}{L}x) - 3\sin(\tfrac{2\pi}{L}x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小形 §4.2(p.64-70)

- 初期値問題 小形 例題 4.3(p.72)
- 固有周波数と波長 小形 例題 4.1(p.68)
- 自由端の固有周波数 小形 4 章演習問題 [4](p.81)

次回の予習ポイント

- 三角関数の積和公式

予習復習問題

明日水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね〜

補講

補講期間 (2013-01-21 or 22) に 1 回やる予定.

ファイナルトライアル

2013-01-29 火 3 か? 出題計画を来週出します. 外部記憶ペーパーありの予定.

模範解答を作ろうプロジェクト!で最大 5 ピーナッツゲット!

問題の模範解答を作ってみんなで共有するプロジェクトです.
樋口の e ラーニングサイト → 現象の数学 B → 模範解答を作ろうプロジェクト!
に投稿されている問題に対して, 模範解答を紙に作成して, スキャンしたものをフォーラムに返信してください.
自宅のスキャナや, 理工学部実習室 1-612(おすすめ) や, 3 号館地下第 2 セルフラーニング室でスキャンできます.

`http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/info/teaching/scanner.php`

- 貢献に対して 1 問あたり最大 5 ピーナッツ, 1 人あたり最大 5 ピーナッツの加算があります.
- 最初の解答が完璧でなかった場合, 投稿した人, または他の人が修正したものを再投稿することができます.
- 最終的な完璧な答案を投稿した人よりも, 各難関ポイントを解決して貢献した人を評価してピーナッツを決定します. 何人かの貢献で 1 問の最終的な答案が完成したら, 5 ピーナッツがその人々に分配されます.
- また, 独立に作成した投稿でも, 同じ内容なら, 一番最初に投稿した人のみを評価します.