波動方程式の進行波解

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L13(2013-01-15 Tue)

今日の目標

1. 霊感が効く場合に波動方程式の初期値問題が解ける
2. 進行波とは何か, なぜ波動方程式の解になっているか説明できる

http://hig3.net

Quiz 解答:波動方程式の初期値問題

初期条件には $\ell = 3$ 固有モードだけが現れているので,

$$u(x,t) = Cg^{(3)}(x,t,\theta^{(3)}) = \sin\frac{3\pi}{L}x[A^{(3)}\cos(\frac{3\pi v}{L}t) + B^{(3)}\sin(\frac{3\pi v}{L}t)]$$

とおいて未知定数 $A^{(3)}, B^{(3)}$ を初期条件から決めると,
$A^{(3)} = 0, B^{(3)} = -2 \cdot \frac{L}{3\pi v}$. よって, 求める解は

$$u(x,t) = -2 \cdot \frac{L}{3\pi v}\sin(\frac{3\pi}{L}x)\sin(\frac{3\pi v}{L}t)$$

.

Quiz(波動の初期値境界値問題)

固定境界条件 ($u(0,t) = u(L,t) = 0$) の波動方程式を, 次の初期条件のもとで解こう.

$$u(x,0) = -2\sin(\tfrac{\pi}{L}x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -3\sin(\tfrac{2\pi}{L}x).$$

霊感の使い方

- 初期条件に出てきているモードはすべて $u(x,t)$ を想像するときに含めておく.
- 不要なモードまで含めても, $A^{(\ell)} = 0$ が出て答は正しくなる (ただし疲れる).
- 必要なモードを含めないと, 矛盾がでるので, おとなしくいれなおす.

Quiz(波動の初期値境界値問題)

固定境界条件 $(u(0,t) = u(L,t) = 0)$ の波動方程式を, 次の初期条件のもとで解こう.

$$u(x,0) = -2\sin(\tfrac{2\pi}{L}x) + \sin(\tfrac{5\pi}{L}x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

敵は変装しているかも…

Quiz(波動の初期値境界値問題)

波動方程式を,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

を, 固定境界条件 ($u(0,t) = u(L,t) = 0$) と初期条件

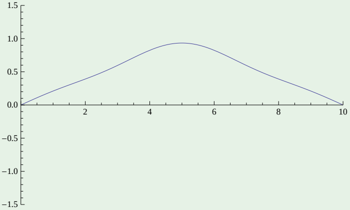
$$u(x,0) = -2\sin(\tfrac{\pi}{L}x)\cos(\tfrac{3\pi}{L}x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

のもとで解こう.

敵は変装しているかも…

Quiz(波動方程式の時間発展)

固定端の弦の振動を考える．横軸 x, 縦軸 u のこの状態からそっと手を放すと，どう変化していく？



1.
2.
3.
4.
5.
6.

解は,

$$u(x,t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} A^{(\ell)} \sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x)\cos(\tfrac{\ell\pi v}{L}t)$$

,

$$A^{(\ell)} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$\boxed{\qquad\qquad}$ 解いた?

フーリエ級数変換

三角関数の正規直交関係

$e^{(\ell)}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\ell\pi}{L} x$ に対して

$$\int_0^L e^{(\ell)}(x) e^{(m)}(x)\, \mathrm{d}x = \delta_{\ell m} = \begin{cases} 0 & (\ell \neq m) \\ 1 & (\ell = m) \end{cases}$$

フーリエ級数展開

$f(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} C^{(\ell)} e^{(\ell)}(x)$, という展開をフーリエ級数展開という.

両辺に $\int_0^L \mathrm{d}x\, e^{(m)}(x) \times$ することで, $C^{(m)} = \int_0^L e^{(m)}(x) f(x)\, \mathrm{d}x$ と求められる (フーリエ級数変換)

進行波解 (ダランベールの解)

今日は境界条件のことは考えません. $-\infty < x < +\infty$ 全体で考えると思ってもいい.

進行波解 (ダランベールの解)

$u(x,t)$ について, 次の 2 つは同値.

- 波動方程式
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$
の解である
- 適当な 1 変数関数 $f(z), g(z)$ を用いて
$$u(x,t) = f(x+vt) + g(x-vt)$$
と書ける

進行波解の例

$$u(x,t) = \sin(x - vt)$$

- $f(x-vt)$ である例: $3, x^2 - 2xvt + v^2t^2, (x-vt)^2 \times \sin(x-vt), \ldots$
- $f(x-vt)$ でない例: $(x-vt)^2 + x$, $vx + t$, xvt, $x + vt, \ldots$

‘書けるなら解である’ ことの証明

$$\text{右辺} = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x - vt) = v^2 g''(x - vt).$$

$$\text{左辺} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} g(x - vt) = \boxed{} = (-v)^2 g''(x - vt)$$

f も同様. 波動方程式は線形なので $f + g$ も解.

'解であるなら書ける' ことの証明

$$
\begin{aligned}
g^{(\ell)}(x,t;\theta^{(\ell)}) &= \sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x)\cos(\tfrac{\ell\pi vt}{L} - \theta^{(\ell)}) \\
&= (\text{積和公式}) \\
&= \tfrac{1}{2}[\sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x + \tfrac{\ell\pi vt}{L} - \theta^{(\ell)}) + \sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x - \tfrac{\ell\pi vt}{L} + \theta^{(\ell)})] \\
&= \tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{\ell\pi}{L}(x+vt) - \theta^{(\ell)}) + \tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{\ell\pi}{L}(x-vt) + \theta^{(\ell)}) \\
&= f(x+vt) + g(x-vt)
\end{aligned}
$$

$f(x+vt)$ の意味

波形 $y=f(x)$ を, $-vt$ だけ x 方向に平行移動したもの.
$y=f(x)$ の形を保ったまま

$g(x-vt)$ は
$y=g(x)$ の形を保ったまま

進行波解

波動方程式の解は,

波動方程式に現れる定数 v は進行波の速さ.

Quiz(進行波解)

$u(x,t) = f(x + \frac{1}{2}t) + 2f(x - \frac{1}{2}t)$, ただし

$$f(z) = \begin{cases} 0 & (z < -2) \\ 4 + 2z & (-2 \leq z < 0) \\ 4 - 2z & (0 \leq z < 2) \\ 0 & (2 \leq z) \end{cases}$$

とする.

1. $t = -4$ のとき, $y = u(x,t)$ のグラフを, 横軸 x, 縦軸 y で描こう.
2. $t = 0$ のとき, $y = u(x,t)$ のグラフを, 横軸 x, 縦軸 y で描こう.
3. $t = 3$ のとき, $y = u(x,t)$ のグラフを, 横軸 x, 縦軸 y で描こう.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

- 波動方程式の一般解と初期値問題 小形 §4.2
- フーリエ級数変換 小形 §4.3
- 進行波 小形 §6.1,§6.4

- 初期値問題 小形 例題 4.3(p.72)

予習復習問題

明日水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね〜

補講

補講期間中の 2013-01-22 火 3 にやります．部屋ここ．

模範解答を作ろうプロジェクト!

やってます．先週の資料参照．

ファイナルトライアル計画!

外部記憶ペーパーあり．別紙参照.
出題計画 2013-01-22 Tue に修正, 詳細化します.

- 固有周波数と固有モードを求めよう (プチテスト再出題)
- 初期条件から 2 物体の連成振動の運動を求めよう (L08)
- うなりの $u(t)$ のグラフを描こう (L08)
- 3 物体の連成振動の固有周波数と固有モードを求めよう (L08) 公式使用不可．行列の固有値と固有ベクトル求める方法で.
- N 物体の固有周波数と固有モードと波数を求めよう (L09) 外部記憶ペーパーに書いておいた公式使用可.
- 波動方程式の直観的意味, 時間発展の直観的判定 (L10,L11)
- 波動方程式の固有モード, 分散関係 (L11)
- 波動方程式の初期値問題 (L12)
- 進行波解 (L13)
- ワイルドカード

選択肢問題もあります.