波動方程式の進行波解, 反射, 定在波

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L14(2013-01-22 Tue)

今日の目標

1. 進行波とは何か, なぜ波動方程式の解になっているか説明できる
2. 進行波の考えを利用して波動方程式の解が求められる

http://hig3.net

Quiz 解答:波動の初期値境界値問題

固定境界条件のもとでの波動方程式の一般解は

$$u(x,t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x)[A^{(\ell)}\cos(\tfrac{\ell\pi v}{L}t) + B^{(\ell)}\sin(\tfrac{\ell\pi v}{L}t)]$$

初期条件はモード $\ell = 2,5$ だけを含むので, $A^{(2)}, A^{(5)}, B^{(2)}, B^{(5)}$ 以外は $A_{(1)} = A_{(3)} = A_{(4)} = A_{(6)} = \cdots = B_{(1)} = B_{(3)} = B_{(4)} = B_{(6)} = \cdots = 0$ として,

$$u(x,t) = \sum_{\ell=2,5} \sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x)[A^{(\ell)}\cos(\tfrac{\ell\pi v}{L}t) + B^{(\ell)}\sin(\tfrac{\ell\pi v}{L}t)]$$

とおいてみる.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{\ell=2,5} \sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x)\tfrac{\ell\pi v}{L}[-A^{(\ell)}\sin(\tfrac{\ell\pi v}{L}t) + B^{(\ell)}\cos(\tfrac{\ell\pi v}{L}t)].$$

より,

$$
\begin{aligned}
u(x,0) =& A^{(2)}\sin(\tfrac{2\pi}{L}x) + A^{(5)}\sin(\tfrac{5\pi}{L}x) = -2\sin(\tfrac{2\pi}{L}x) + \sin(\tfrac{5\pi}{L}x),\\
\tfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) =& \tfrac{2\pi v}{L}B^{(2)}\sin(\tfrac{2\pi}{L}x) + \tfrac{5\pi v}{L}B^{(5)}\sin(\tfrac{2\pi}{L}x) = 0
\end{aligned}
$$

係数を比較して, $A^{(2)} = -2, A^{(5)} = 1, B^{(2)} = B^{(5)} = 0.$
実際,

$$
u(x,t) = -2\sin(\tfrac{\pi}{L}x)\cos(\tfrac{\pi v}{L}t) + \sin(\tfrac{5\pi}{L}x)\sin(\tfrac{5\pi v}{L}t)
$$

は初期条件を条件を満たす解になっている.

進行波解 (ダランベールの解)

しばらく境界条件のことは考えません. $-\infty < x < +\infty$ 全体で考えると思ってもいい.

進行波解 (ダランベールの解)

$u(x,t)$ について, 次の 2 つは同値.

- 波動方程式
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$
の解である
- 適当な 1 変数関数 $f(z), g(z)$ を用いて
$$u(x,t) = f(x+vt) + g(x-vt)$$
と書ける

進行波解の例

$$u(x,t) = \sin(x - vt)$$

- $g(x-vt)$ である例: $3, x^2 - 2xvt + v^2t^2, (x-vt)^2 \times \sin(x-vt), \ldots$
- $g(x-vt)$ でない例: $(x-vt)^2 + x$, $vx + t$, xvt, $x + vt, \ldots$

'書けるなら解である' ことの証明

$$\text{右辺} = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x - vt) = v^2 g''(x - vt).$$

$$\text{左辺} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} g(x - vt) = \boxed{\qquad\qquad\qquad} = (-v)^2 g''(x - vt)$$

f も同様. 波動方程式は線形なので $f + g$ も解.

'解であるなら書ける' ことの証明

$\boxed{}$ ことを示せば十分

$$
\begin{aligned}
g^{(\ell)}(x,t;\theta^{(\ell)}) =& \sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x)\cos(\tfrac{\ell\pi vt}{L}-\theta^{(\ell)}) \\
=& (\text{積和公式}) \\
=& \tfrac{1}{2}[\sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x+\tfrac{\ell\pi vt}{L}-\theta^{(\ell)})+\sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x-\tfrac{\ell\pi vt}{L}+\theta^{(\ell)})] \\
=& \tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{\ell\pi}{L}(x+vt)-\theta^{(\ell)})+\tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{\ell\pi}{L}(x-vt)+\theta^{(\ell)}) \\
=& f(x+vt)+g(x-vt)
\end{aligned}
$$

大事な寄り道 $\ell x = nL$: 変位 u はずっと 0 節

$\ell x = (n+\frac{1}{2})L$: 振幅最大 腹

このように, 腹と節の位置が一定であるような波動を定在波 (定常波) という.

節の位置 $x = 0, L$ に固定境界条件が課されていると思えば, これは固有モードに一致.

$f(x+vt)$ の意味

波形 $u=f(x)$ を, $-vt$ だけ x 方向に平行移動したもの.
$f(x+vt)$ は, $u=f(x)$ の形を保ったまま

□ 進む進行波

$g(x-vt)$ は $u=g(x)$ の形を保ったまま

□ 進む進行波

進行波解

波動方程式の解は,

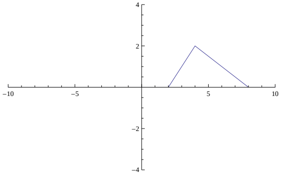
□ と □

重ね合わせ
波動方程式に現れる定数 $v>0$ は進行波の速さ.

進行波解の固定端での反射

次の左向き進行波はもちろん (境界条件なしの) 波動方程式を満たす.

$$u(x,t) = f(x+vt), \quad f(z) =$$



では固定境界条件 $u(0,t)=0$ を満たすか?

$\rightsquigarrow$ 固定境界条件を満たすには

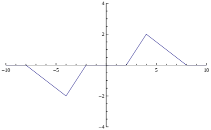
が必要

右向き進行波 $g(x - vt)$ の条件

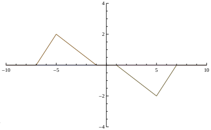
$$
\begin{aligned}
\forall t \ u(0,t) &= 0 \\
\forall t \ f(0+vt) + g(0-vt) &= 0 \\
\forall z \ f(-z) + g(z) &= 0 \quad (vt = -z \text{ とおいた})
\end{aligned}
$$

結局, $g(z) = -f(-z) = \boxed{\quad}$

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$が壁の向こうからやってくる.



$\rightarrow$ $\rightarrow$



これを次のようにいう (高校のころから)

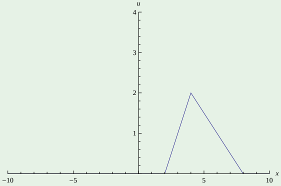
- 反射波は符号が逆になる
- $\boxed{\qquad}$(=固定境界条件を課した位置) では位相が π ずれる

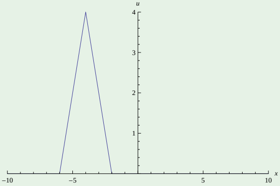
Quiz(進行波解)

波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

ただし $v = \frac{1}{2}$ の実軸上の解 $u(x,t) = f(x+vt) + g(x-vt)$ を考える.

ここで, $f(z) =$ 

, $g(z) =$ 

とする.

1. $t = 4$ のとき, $u(x,t)$ のグラフを, 横軸 x, 縦軸 u で描こう.
2. $t = 20$ のとき, $u(x,t)$ のグラフを, 横軸 x, 縦軸 u で描こう.
3. $t = 6$ のとき, $u(x,t)$ のグラフを, 横軸 x, 縦軸 u で描こう.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

- 進行波 $\boxed{\text{小形 §6.1,§6.4}}$
- 定在波 $\boxed{\text{小形 §6.6}}$
- 波の反射 $\boxed{\text{小形 §6.5}}$

予習復習問題

明日水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね〜

模範解答を作ろうプロジェクト!

やってます. 先週の資料参照.

ファイナルトライアル計画!

外部記憶ペーパーあり．別紙参照．
出題計画

- 固有周波数と固有モードを求めよう (プチテスト再出題)
- 初期条件から 2 物体の連成振動の運動を求めよう~~(L08)~~(L07)(プチテスト再出題)
- うなりの $u(t)$ のグラフを描こう (L08)
- 3 物体の連成振動の固有周波数と固有モードを求めよう~~(L08)~~(L07)(プチテスト再出題)
  公式使用不可．行列の固有値と固有ベクトルを求める方法で．
- N 物体の固有周波数と固有モードと波数を求めよう (L09) 外部記憶ペーパーに書いておいた公式使用可．
- 波動方程式の直観的意味, 時間発展の直観的判定 (L10,L11)
- 波動方程式の固有モード, 分散関係 (L11)
- 波動方程式の初期値問題 (L12,L13)
- 進行波解 (L14)
- ワイルドカード

選択肢問題もあります．