力学プチテスト

樋口さぶろお[1] 配布: 2010-06-09 Wed 更新: Time-stamp: "2010-06-16 Wed 23:49 JST hig"

プチテスト参加案内

1. 要過程 の問では過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
2. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

物体の 1 次元の運動について考える. 物体が x にあるとき, 力 $F(x) = -2x + 8$ を受けるとする. ポテンシャルエネルギー $U(x)$ を求めよう.

2

物体の 3 次元の運動について考える. 位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}|$ とする.

1. ポテンシャルエネルギーが $U(\boldsymbol{r}) = xy^2 + z^3$ であるとき, 力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を求めよう.
2. ポテンシャルエネルギーが $U(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{1+r^2}$ であるとき, 力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を求めよう.

3

要過程 力 $F(x) = -4x$ のもとで運動する質量 $m = \frac{1}{9}$ の物体の時刻 t における位置が, $x(t) = -5\cos(6t)$ で与えられる. 時刻 t における運動エネルギー K, 位置エネルギー U, 力学的エネルギー E を求めよう.

4

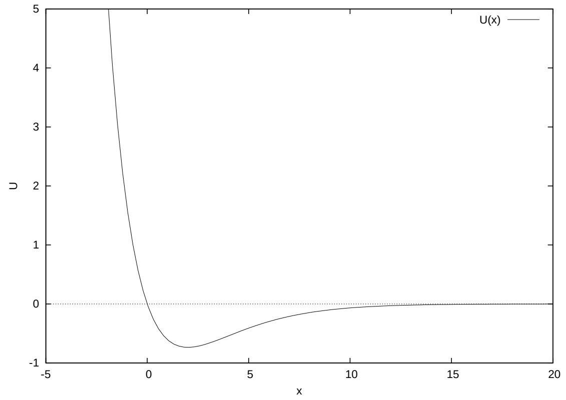
要過程 床の上に, 自然長 ℓ, ばね定数 k のばねを鉛直方向に設置し, その上に質量 m の物体をおく. 物体には, ばねの力と, 鉛直下向きの重力 (大きさ mg) がはたらく. 床の面を原点とする, 鉛直上向きの x 軸をとる. 時刻 t における物体の位置を $x(t)$ とする. 物体を自然長の位置に支えた状態から, 静かに手をはなしたところ振動した. 物体が到達するいちばん低い点の x 座標を, エネルギー保存則を利用して求めよう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

5

図のようなポテンシャル $U(x)$ のもとでの質量 $m=1$ の物体の運動を考える．ただし，$x \to +\infty$ で $U(x) \to 0$, $x \to -\infty$ で $U(x) \to +\infty$ である．次の物体のその後の運命を，授業ののりで答えよう．

点の位置は，グラフから数値で (有効数字 1 桁くらいで) 読み取って指定しよう．



1. 時刻 $t=0$ に $x=2.5$ にあって，左向きに進んでいる，力学的エネルギーが $E=-0.5$ の物体

2. 時刻 $t=0$ に $x=10$ にあって，左向きに進んでいる，物体の力学的エネルギーが $E=+3$ の物体

6

要過程　質量 $m=3$ の物体の時刻 t における位置ベクトルが，$\boldsymbol{r}(t)=(2\cos t, 3, 2t)$ で与えられる．時刻 t における物体の角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}(t)$ を求めよう．

7

要過程　物体が位置 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ で受ける力が，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=(2x^3, 2y^3, 2z^3)$ で与えられる．

1. この力は中心力であるかどうか，判定しよう．

2. この力は保存力であるかどうか，判定しよう．

8

要過程　原点に静止した質量 M の物体の重力場 (万有引力定数 G) のもとで，質量 m の物体が長半径 a, 離心率 $e=0$ の軌道を運動している．

1. 質量 m の物体の面積速度 h を求めよう．

2. 質量 m の物体の運動エネルギー K, 位置エネルギー U, 力学的エネルギー E を求めよう．

9

物体が, 原点を力の中心とする (重力とはかぎらない) 中心力を受けて xy 平面を運動している. 物体の軌跡は, 楕円 $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ である. また, 時刻 0 における物体の位置は $\boldsymbol{r}(0) = (0, 3, 0)$ 速度は $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(0) = (-4, 0, 0)$ である.

1. 原点に関する物体の面積速度 h を求めよう.
2. 物体が $(-2, 0, 0)$ を通過するときの速度 $\boldsymbol{v}$ を求めよう.

10

$\boxed{\text{要過程}}$ 地球, 金星は太陽の重力を受けて公転している. 金星の楕円軌道の軌道長半径は, 地球の 0.7 倍である. 金星の公転周期は何日 (地球の 1 日で数えて) であるか求めよう.

11 アンケート

これは問題でなくアンケートです.

この問題を一通り解き終わるのに何分かかりましたか. 解き終わらなかった人は, 何分あれば一通り解き終わりそうですか.

また, 自信のある問題, ない問題を答えてください.

授業について自由記述で答えるアンケートを e ラーニングサイトに設置しています. ご協力ください.

力学プチテスト略解

樋口さぶろお[2]　配布: 2010-06-09 Wed 更新: Time-stamp: "2010-06-16 Wed 23:49 JST hig"

配点　各 10 点. 計 100 点.

1

$$U(x) = -\int_0^x F(s)\,\mathrm{d}s = x^2 - 8x.$$

2

1. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{r}) = (-y^2, -2xy, -3z^2)$.
2. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} = (1+r^2)^{-2}(2x, 2y, 2z) = 2(1+r^2)^{-2}\boldsymbol{r}$.

配点　1. 各成分 2 点, 2. 4 点

講評　2. で, $((1+r^2)^{-1})' = -(1+r^2)^{-2}(2r)$ というのは正解とはいえない. $\boldsymbol{\nabla}$ を作用させた結果, ベクトルが得られるはず.

3

運動エネルギー $K = \frac{1}{2}m(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t))^2 = 50\sin^2 6t$, 位置エネルギー $U = 2(x(t))^2 = 50\cos^2 6t$, 力学的エネルギー $E = K + U = 50$.

配点　K, E の式各 2 点, U の式 4 点, E の最終的結果 2 点.

講評　$-\int^x F(s)\mathrm{d}s$ で求まるのは, 位置 x の関数である $U(x)$. $U(x(t))$ は時刻の関数.

4

力学的エネルギー保存則は, $\frac{1}{2}m(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t))^2 + \frac{1}{2}k(x(t)-\ell)^2 + mgx(t) = E$. ($E$ は定数).
手をはなした時刻について

$$\frac{1}{2}m0^2 + \tfrac{1}{2}k(\ell-\ell)^2 + mg\ell = E.$$

いちばん低い点 x に到達した時刻について,

$$\frac{1}{2}m0^2 + \tfrac{1}{2}k(x-\ell)^2 + mgx = E.$$

E を消去すると, 未知数 x についての 2 次方程式. これを解いて, $x = \ell, \ell - \frac{2mg}{k}$. いちばん低いのは $x = \ell - \frac{2mg}{k}$.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

配点　重力ポテンシャル 2 点, ばねのポテンシャル 2 点, $t = 0$ の式 2 点, 最低の式 2 点, 最終的結果 2 点.

講評　x は自然長の位置から測ってるわけじゃないから $\frac{1}{2}k(x-\ell)^2$. x の正の向きは鉛直上向きだから $+mgx$.

5

1. $x = 1$ まで進み, 一瞬静止して右向きに進み始める. $x = 4$ まで進み, 一瞬静止して左向きに進み始める. 以後, $x = 1$ と $x = 4$ の間を往復運動.
2. $x = -1$ まで進み, 一瞬静止してその後は右に進む. $x \to \infty$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \to \sqrt{6}$.

配点　各 5 点

講評　$U(2.5)$, $U(10)$ は運動の様子と関係ない. 2. で $(-0.1, +\infty)$ を往復って, どこで折り返してくるの?

6

$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = (-2\sin t, 0, 2)$. $\boldsymbol{L}(t) = m\boldsymbol{r}(t) \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = 3(6, -4\cos t - 4t\sin t, 6\sin t)$.

講評　みんな外積の計算は慣れてるね.

7

1. 中心力でない. この場合, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, $|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})| \neq f(r)$ はどちらも成立しない (一方を示せばいい).
2. 保存力である. $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$. 実際ポテンシャルは $U(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{2}(x^4 + y^4 + z^4)$.

配点　各 5 点

8

1. 離心率が 0 なのでこれは等速円運動. 長半径は半径. 角速度を ω とすると, 動径方向の運動方程式 (の絶対値) より, $\frac{GMm}{a^2} = ma\omega^2$. よって $\omega = \sqrt{GM/a^3}$. 面積速度は $h = \frac{1}{2}a^2\omega = \sqrt{GMa}$.
2. 運動エネルギー $K = \frac{1}{2}m(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t})^2 = \frac{1}{2}m(a\omega)^2 = \frac{GMm}{2a}$. 位置エネルギー $U = -\frac{GMm}{a}$. 力学的エネルギー $E = K + U = -\frac{GMm}{2a}$.

配点　1. 4 点, 2. 2×3 点.

講評　速度と面積速度は違う．面積速度はむしろ角運動量のようなもの．

9

1. $h = |\frac{1}{2}(0,3,0) \times (-4,0,0)| = 6.$
2. 速度は軌道の接線に平行だから, この点で $\boldsymbol{r}$ と $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ は直交する．物体は楕円を反時計回りに運動しているので, 速度は $\boldsymbol{v} = (0, -v, 0)$．面積速度一定より, $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v = 6.$ よって $\boldsymbol{v} = (0, -6, 0).$

配点　各 5 点

10

$0.7^{3/2} \times 365 \simeq 200$ 日くらい．

配点　正しいケプラーの第 3 法則が書いてあれば 6 点．結果に 4 点．

講評　公転というのは他の天体のまわりを周回すること．地球の 1 日で数えて, っていうのは, 金星の 1 日 (=金星の自転周期) は地球の 1 日と違うけど地球日単位で答えてね, っていう意味．

http://hig3.net