力学ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] 配布: 2010-07-28 Wed 更新: Time-stamp: "2010-08-05 Thu 08:44 JST hig"

ファイナルトライアル参加案内

1. 外部記憶ペーパー作成 10 分, 答案作成 80 分
2. 指定された用紙に解答しよう.
3. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
4. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

$\boxed{\text{この問だけ配点 2 倍で 20 点}}$

質量 $m_1 = m_2 = 1$ の 2 つの物体が, xy 平面上を運動している. 位置ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{r}_1(t) = (3t, 6, 0), \boldsymbol{r}_2(t) = (t, 0, 0)$ で与えられる.

重心座標 $\boldsymbol{R}(t)$, 相対座標 $\boldsymbol{r}(t)$, 換算質量 μ, 相対座標の角運動量 $\boldsymbol{L}'$ を求めよう.

2

3 個の物体の質量が $m_1 = 1,\ m_2 = 2,\ m_3 = 1$, 位置ベクトルが $\boldsymbol{r}_1(t) = (4t, 0, 0)$, $\boldsymbol{r}_2(t) = (0, 4t, 0)$, $\boldsymbol{r}_3(t) = (0, 0, 0)$ で与えられる.

全運動エネルギー K と, 重心座標の運動エネルギー K_{G} を求めよう.

3

質量がそれぞれ $m, \frac{1}{3}m$ の 2 つの天体が, たがいの重力を受けて, 距離 a だけ離れて, 円軌道を描いて運動している. 万有引力定数を G とする.

換算質量を求め, 公転周期 (円軌道を 1 周するのに要する時間) を求めよう.

4

x 軸上を運動する 2 つの物体 A,B がある. 衝突時以外は 2 物体に力ははたらかない.

最初は, 質量 m の物体 A は速度 $v_{\mathrm{A}} = v$, 質量 $2m$ の物体 B は速度 $v_{\mathrm{B}} = -2v$ で運動していたが, 反発係数 $e = \frac{1}{2}$ で非弾性衝突した.

衝突後の物体 A,B の速度 $v'_{\mathrm{A}}, v'_{\mathrm{B}}$ を求めよう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

5

直方体 $0 \le x \le 3, 0 \le y \le 4, 0 \le z \le 5$ の剛体を考える. 剛体の重心の座標 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$ を求めよう. ただし, 質量密度は $\rho(\boldsymbol{r}) = 1 + x^2$ で与えられる.

6

質量 M, 長さ ℓ の, 細い棒状の一様な剛体が, x 軸上の $-\frac{1}{3}\ell \le x \le \frac{2}{3}\ell$ の部分に置かれている. z 軸を固定軸として回転するとき, 慣性モーメントを求めよう.

7

質量 M, 半径 a, 高さ h の (中身のつまった) 円柱状の一様な剛体が, 円柱の軸を固定軸として回転する. 慣性モーメントは $I = \frac{1}{2}Ma^2$ で与えられる.

重心を原点, 固定軸を z 軸とする座標系をとる. 時刻 $t = 0$ に静止していた剛体に, $t \ge 0$ に, 点 $\boldsymbol{r} = (\frac{3}{5}a, \frac{4}{5}a, \frac{1}{2}h)$ の位置に, 一定の力 $\boldsymbol{F} = (2, 3, 0)$ を加え続けた.

時刻 0 から t までに剛体が回転した角 $\theta(t)$ を求めよう.

8

地球の自転 (地軸=北極と南極を通る軸を固定軸とする剛体の回転) の回転エネルギーを求めよう. 単位をつけて有効数字 1 桁で求めよう.

質量 M, 半径 a の一様な球の, 中心を通る軸のまわりの慣性モーメントは $I = \frac{3}{5}Ma^2$ で与えられる. 地球は正確には球じゃないし, 真ん中のほうに重い核があるので一様じゃないんだけど, いいや, この式使っちゃえ〜

次のデータを使おう. ただし無駄なデータも入っているのでご注意.

- 万有引力定数 $G = 7 \times 10^{-11} \mathrm{m}^3/\mathrm{kg}/\mathrm{s}^2$.
- 地球の質量 $= 6 \times 10^{24}$ kg, 太陽の質量 $= 2 \times 10^{30}$ kg, 1 円玉の質量 $= 1 \times 10^{-3}$ kg.
- 地球の半径 $= 6 \times 10^6$ m, 地球の太陽のまわりの軌道半径 $= 2 \times 10^{11}$m.
- 1 日 $= 9 \times 10^4$ s (s=秒),1 月 $= 3 \times 10^6$ s,1 年 $= 3 \times 10^7$ s, 龍谷大学の年齢=370 年.

9

xy 平面内を, 一様で細い, 長さ $4a$, 質量 M のまっすぐな剛体の棒が (固定軸なしに) 自由に運動する. この棒の重心のまわりの慣性モーメントは $I = \frac{4}{3}Ma^2$ で与えられる.

時刻 $t \le 0$ に, この棒の両端は, $(\sqrt{2}a, \sqrt{2}a, 0), (-\sqrt{2}a, -\sqrt{2}a, 0)$ にあり, 静止していた.

時刻 $t = 0$ に, 棒の途中の点 $(-a, -a, 0)$ に撃力 $\boldsymbol{F}\tau = (1, 3, 0)$ を加えた.

1. 時刻 $t > 0$ における棒の重心の速度を求めよう.
2. 時刻 $t > 0$ における棒の回転の角速度を求めよう. 反時計回りを正の角速度とする.

龍谷大学 > 理工学部 > 数理情報学科 > 樋口 > 担当科目 > 2010 年 > 力学

力学ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2010-07-28 Wed 更新: Time-stamp: ”2010-08-05 Thu 08:44 JST hig”

配点 1:20 点, 2–9:10 点. 計 100 点.

1

重心座標は $\boldsymbol{R}(t)=\frac{\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t)}{1+1}=(2t,3,0)$. 相対座標は $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_2(t)-\boldsymbol{r}_1(t)=(-2t,-6,0)$. 換算質量は $\mu=\frac{1\cdot 1}{1+1}=\frac{1}{2}$. 相対座標の角運動量は $\boldsymbol{L}'=\mu\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}(-2t,-6,0)\times(-2,0,0)=(0,0,-6)$.

Remark 相対座標の角運動量は $m_1\boldsymbol{r}'_1\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_1}{\mathrm{d}t}+m_2\boldsymbol{r}'_2\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_2}{\mathrm{d}t}$ でも求められる.

配点 重心座標, 相対座標, 換算質量, 角運動量各 5 点. ベクトルとスカラーの記号の区別がついていない場合 -1 点または -2 点.

2

全運動エネルギーは, $K=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4^2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4^2+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0=24$.

重心座標は $\boldsymbol{R}(t)=\frac{\boldsymbol{r}_1(t)+2\boldsymbol{r}_2(t)+\boldsymbol{r}_3(t)}{1+2+1}=(t,2t,0)$. 重心座標の運動エネルギーは $K_{\mathrm{G}}=\frac{1}{2}(1+2+1)|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}(t)|^2=10$.

配点 全運動エネルギー 5 点, 重心の運動エネルギー 5 点.

講評 $\boldsymbol{F}=-\nabla U$ だからエネルギーはスカラーでしょ〜

3

換算質量は $\mu=\frac{m\frac{1}{3}m}{m+\frac{1}{3}m}=\frac{1}{4}m$.

等速円運動の角速度を ω とすると, 相対座標の運動方程式より, $\mu a\omega^2=\frac{Gm\frac{1}{3}m}{a^2}$. よって,

$$\text{周期 } T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{a^3\frac{1}{4}m}{G\frac{1}{3}m^2}}=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G\cdot(1+\frac{1}{3})m}}.$$

[2]
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

配点　換算質量 3 点, 運動方程式相当の情報 5 点, 答 2 点.

4

運動量保存則より

$$mv + (2m)(-2v) = mv'_{\mathrm{A}} + 2mv'_{\mathrm{B}}$$

反発係数の値より

$$\frac{|v'_{\mathrm{B}} - v'_{\mathrm{A}}|}{|-2v - v|} = \frac{1}{2}.$$

これを連立して解くと, $v'_{\mathrm{A}} = -2v, v'_{\mathrm{B}} = -\frac{1}{2}v$.

Remark　絶対値のはずし方によっては, $v'_{\mathrm{A}} = 0, v'_{\mathrm{B}} = -\frac{3}{2}v$ という解もでてくる. A の速度が 0 になるのは悪いことではないが, 衝突後に A,B の x 軸上の順序がいれかわってしまうので, 物体の衝突というときはふつうはこちらの解は考えない.

配点　運動量保存則 4 点, 反発係数の条件 4 点, 答 2 点. 絶対値符号の外し方による不適な解にも同じだけの点を与えています.

5

剛体の質量 M は

$$M = \int_B \rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V = \int_0^3 \mathrm{d}x \int_0^4 \mathrm{d}y \int_0^5 \mathrm{d}z (1 + x^2) = (3 + 9) \cdot 4 \cdot 5 = 240.$$

よって重心の座標は,

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} = \frac{1}{M} \int_B \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V = \left(\frac{1}{M} \int_0^3 \mathrm{d}x \int_0^4 \mathrm{d}y \int_0^5 \mathrm{d}z\; x(1 + x^2), 2, \frac{5}{2} \right) = (\tfrac{495}{240}, 2, \tfrac{5}{2}) = (\tfrac{33}{16}, 2, \tfrac{5}{2}).$$

Remark　y, z 座標については, 対称性から中央の位置になることが計算しなくてもわかる.

配点　M 3 点, $\int x\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V$ 3 点, y, z 成分各 2 点.

6

質量 (線) 密度を ρ (定数) とすると,

$$M = \int_{-\frac{1}{3}\ell}^{\frac{2}{3}\ell} \rho \, \mathrm{d}x = \rho\ell.$$

慣性モーメントは

$$I = \int_{-\frac{1}{3}\ell}^{\frac{2}{3}\ell} x^2 \rho \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}((\tfrac{2}{3}\ell)^3 - (-\tfrac{1}{3}\ell)^3)\rho = \tfrac{1}{9}\ell^3\rho = \tfrac{1}{9}M\ell^2.$$

Remark　一般に剛体では, 重心を通る回転軸のまわりの慣性モーメント I_{G} と, h だけずれた平行な回転軸のまわりの慣性モーメント I_h の間には, $I_h = I_G + Mh^2$ という関係がなりたつ. 今の場合 $I_G = \frac{1}{12}M\ell^2, h = \frac{1}{6}\ell$ である.

また, それぞれ $\ell_1 = \frac{1}{3}\ell, \ell_2 = \frac{2}{3}\ell$, $M_1 = \frac{1}{3}M, M_2 = \frac{2}{3}M$ の, 端に固定軸がある 2 本の棒の慣性モーメントの和としても求められる. $I = \frac{1}{3}\frac{1}{3}M(\frac{1}{3}\ell)^2 + \frac{1}{3}\frac{2}{3}M(\frac{2}{3}\ell)^2$.

配点　I の定義 3 点, I の積分 5 点, ρ と M との関係 2 点.

7

高さ (厚さ) がどれだけでも (薄い円板つまり厚さ=0 でも) 慣性モーメントは同じで $I = \frac{1}{2}Ma^2$.

固定軸が z 方向なので, 力のモーメントの z 成分を N_z とすると,

$$N_z = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F})_z = \tfrac{1}{5}a.$$

回転運動の運動方程式から,

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}(t) = N_z.$$

積分して,

$$\theta(t) = \frac{1}{5Ma}t^2 + C_1 t + C_2 \quad (C_i \text{ は積分定数})$$

最初は回転していなかったので, $L_z(0) = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(0) = C_1 = 0$. また, 時刻 $\theta(t)$ は時刻 0 からの変化なので $\theta(0) = C_2 = 0$. よって,

$$\theta(t) = \frac{1}{5Ma}t^2.$$

Remark z 軸が固定軸なので, $(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F})_x, (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F})_y$ などは関係ない (軸が動かないように抗力がはたらいて打ち消されている).

$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}(t) = N_z, L_z(t) = I\omega = I\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t)$ と, 途中で角運動量の z 成分 L_z を求めて 2 段階で積分してもいい.

配点 力のモーメント 4 点, L_z 3 点, θ 3 点 (θ がベクトルだったら 1 点)

8

回転の角速度を ω とすると, 回転のエネルギーは $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{5} \cdot 6 \times 10^{24} \times (6 \times 10^6)^2 \times (\frac{2\pi}{9\times 10^4})^2 = 3 \times 10^{29}$ J.

配点 I の値 2 点, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ の式 2 点値 2 点, $\frac{1}{2}I\omega$ の式 3 点値 1 点.

配点 地球の自転は, とりあえず重力や太陽とは無関係です.

9

1. 時刻 $t < 0$ では運動量 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$, 撃力が加わった後は, $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{F}\tau = (1, 3, 0)$. よって速度は $\frac{1}{M} = \frac{1}{M}(1, 3, 0)$.
2. 時刻 $t < 0$ では角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{0}$, 撃力が加わった後は, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}\tau = (-a, -a, 0) \times (1, 3, 0) = (0, 0, -2a)$. z 軸のまわりの角速度を ω とすると, $I\omega = L_z = -2a$. よって角速度は $-\frac{3}{2Ma}$.

配点 1. 運動量 3 点, 速度 2 点, 2. 角運動量 3 点, 角度 2 点.

http://hig3.net