力学的エネルギー保存則

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

力学 L01(2010-04-14)

今日の目標

1. 位置エネルギーのイメージを持とう.
2. 力学的エネルギー保存則のイメージを持とう.

http://hig3.net

演習がない授業って?

問題解くのは自分でやれってこと. それが今後はふつう.

点数の計算

科目の成績 100 点
=プチテスト (5 月末)30 点 + ファイナルトライアル (7 月末)50 点+日常活動 10 点+予習復習 10 点 (+追加点).

- 日常活動 授業のさいごにする問題演習=quiz
- 予習復習 次の週までに e ラーニングシステムの問題を解く
- 追加点 今後のお楽しみ. 最大でも 20 点程度
- 資料: 講義で配布. 講義後は `http://hig3.net` からダウンロードまたは 1-503 前のレターボックスで配布.
- 公欠: 介護実習, 部活などの公務欠席, 遅延, インフルエンザなど: 証拠になりそうな紙 (コピーでよい) をつけて樋口に欠席届 (教務課に用紙がある) を提出. 事後でもいいが 1ヶ月以内..

教科書 高木 I で高木, 力学 (II), 裳華房 (2001) より引用, 高木 II で高木, 力学 (II), 裳華房 (2001) より引用 を意味します.

位置・速度・加速度

物理数学 I

位置・速度・加速度の関係

位置		速度		加速度
$x(t)$	$\xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$ $\xleftarrow{\int \mathrm{d}t}$	$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$	$\xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$ $\xleftarrow{\int \mathrm{d}t}$	$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t)$

- 積分するときには, 積分定数は初期条件から決まる.
- 3 次元ならベクトルに対してこれが成立

ニュートンの運動方程式=ニュートンの運動の第 2 法則

物理数学 II

位置・速度・加速度・力の関係

位置		速度		加速度		力
$x(t)$	$\xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$ $\xleftarrow{\int \mathrm{d}t}$	$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$	$\xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$ $\xleftarrow{\int \mathrm{d}t}$	$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t)$	比例 (定数 m) $\longleftrightarrow$ 運動方程式	$F(t)$

ニュートンの運動方程式

物体の加速度は, 力 F に比例, 質量 m に反比例. ニュートンの運動の第 2 法則ともいう.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F(t)$$

例題 (運動方程式を解こう)

質量 $m = 2$ の物体が, ばね定数 $k = 4$ のばねにつながれ, 直線上を運動している. 時刻 t の自然長からのずれを $x(t)$ とする (のびる方向が正). 時刻 $t = 0$ に, 3 だけのばして静かに手を放した. その後の運動?

力学的エネルギー保存則の証明

位置 x だけで決まる力 $F(x)$ を受けて 1 次元の運動をする, 質量 m の質点を考えよう. 高木 I §5.3

運動方程式
$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F(x(t)).$$

あてはまる例　ばねの力.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k \times x(t). \quad \text{すなわち} \quad F(x) = -k \cdot x.$$

あてはまらない例 1　空気抵抗の力+ばねの力. 力 $F = -kx - \gamma v$. v は速度.

あてはまらない例 2　時間 t に ($x(t)$ を通さず) 依存する力 $F(x, t)$. たとえば時間的にばね定数が変化するばね $F(x, t) = -k(t)x$.

$v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ とおくと,

$$m\frac{dv}{dt}(t) = F(x(t)).$$

誰かの超テク. 両辺に $\boxed{}$

$$mv(t)\frac{dv}{dt}(t) = F(x(t))\frac{dx}{dt}(t).$$

$$\int mv(t)\frac{dv}{dt}(t)dt = \int F(x(t))\frac{dx}{dt}(t)dt$$

左辺で変数変換 $t \to v(t)$, 右辺で変数変換 $t \to x(t)$.

$$dv = \frac{dv}{dt}(t)dt \text{ より, 左辺} = \int mv\,dv = \frac{1}{2}mv^2 + C_1.$$

$$dx = \frac{dx}{dt}(t)dt \text{ より, 右辺} = \int F(x)dx + C_2.$$

関数 $U(x)$ を $\boxed{U(x) = -\int_0^x F(s)ds}$ と定義.

力学的エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + C_1 = -U(x) + C_2'.$$

力学的エネルギー保存則 高木 I §5.3

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + U(x(t)) = E(\text{時間 } t \text{ によらず一定})$$

第 1 項 $K = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2$ を質点の $\boxed{}$,

第 2 項 $U(x)$ を質点の $\boxed{}$ または

$\boxed{\text{ポテンシャル (エネルギー)}}$, 高木 I §5.2

右辺 E を $\boxed{\text{力学的エネルギー}}$ という. 単位:kg·m/s^2·m=N·m=J(ジュール)

力学的エネルギー保存則の意味

力学的エネルギー保存則

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + U(x(t)) &= E \\ (\text{一定}) K + U &= E \end{aligned}$$

力 $F(x)$ のもとで 1 次元を運動する質点の力学的エネルギー E は一定で変化しないことをいっている. これを,

- 力学的エネルギーは $\boxed{\qquad\qquad}$
- 力学的エネルギーは $\boxed{\qquad\qquad}$ である
- 力学的エネルギーは不変である

と表現する.

例題 (エネルギーを求めよう)

前の問で, 時刻 t における運動エネルギー, 位置エネルギー, 力学的エネルギーを求めよう.

ポテンシャルと力の関係

$U(x) = -\int^{x} F(s)\,\mathrm{d}s$ なので, 逆に言うと $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x) = -F(x)$.
一般に, 力 F が, ある関数 U を用いて,

$$\boxed{F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x)}$$

と書けるとき, そのような力は $\boxed{\boxed{}}$ であるといい, 関数 $U(x)$ のことをポテンシャルまたは位置エネルギーと呼ぶ. 高木 I §5.4
保存的でない力:摩擦力, 空気抵抗の力,2 次元以上の力の大部分　ベクトル解析.

位置・速度・加速度・力・位置エネルギーの関係

位置 $x(t)$ $\underset{\longleftarrow \int \mathrm{d}t}{\xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}}$ 速度 $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ $\underset{\longleftarrow \int \mathrm{d}t}{\xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}}$ 加速度 $a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)$ $\underset{\text{運動方程式}}{\xleftrightarrow{\text{比例 (定数 } m)}}$ 力 $F(t)$, $F(x(t))$ $\underset{\longleftarrow -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{\xrightarrow{-\int \mathrm{d}x}}$ 位置エネルギー $U(x)$

高校から知ってた例: 一様重力場

鉛直上向きに x 軸, 鉛直下向きの重力加速度 $-g$.
力 $F(x) = -mg$.

高校の知識じゃ答えられない例

例題 (ポテンシャルエネルギーと力)

1. 力が $F(x) = 5\sin(3x)$ であるときポテンシャル $U(X)$?
2. ポテンシャルが $U(x) = -4x^2 + x^4$ であるとき力 $F(x)$?

ジェットコースター詐欺を見破れ!!

このページとばしました

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + U(x(t)) = E$$

よって,

位置エネルギーはいつでも力学的エネルギー以下

$$U(x(t)) \leq E \quad (\text{等号は}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 0\,\text{のとき成立})$$

!!!

ポテンシャル $U(x)$ の直観的意味

1. $y = U(x)$ は重力があるときの坂の形みたいなもの.
2. 物体は低い方に向いた力を受ける.

力のする仕事 (復習)

物体が力 $\boldsymbol{F}$ をうけて, $\Delta \boldsymbol{x}$ だけ移動したとき,
力は物体に $\Delta W = \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{x}$ だけの仕事をしたという.
力が位置によってだんだん変わるとき: $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$

力は物体に $\boxed{}$ だけの仕事をした.

仕事の単位: $\mathbf{N} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{J}$ ジュール.
あれっエネルギーと似た式/単位!

時刻 t_0 に x_0 にあった物体が, 時刻 t_1 に x_1 まで保存力 $F(x)$ を受けて運動したとしよう. 力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0)\right)^2 + U(x_0) = E,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_1)\right)^2 + U(x_1) = E.$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_1)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0)\right)^2 = U(x_0) - U(x_1)$$

$$= \int_0^{x_0} -F(s)\mathrm{d}s - \int_0^{x_1} -F(s)\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x_1} F(s)\,\mathrm{d}s = W.$$

エネルギーと仕事の関係

物体の運動エネルギーの増加分は, 力が物体にした仕事 W に等しい.
その分だけ位置エネルギーは減少する.

物体の運動エネルギー | | 位置エネルギー

仕事とは, 力が作用したことによりおきたエネルギーの移動量 (符号あり).
$W < 0$ のとき, 力は物体に負の仕事をする. このとき, 運動エネルギーが位置エネルギーに変化する.

Quiz (位置エネルギーと運動エネルギー)

1. 力 $F(x) = 3e^{-2x}$ が物体にはたらくとき, ポテンシャル $U(x)$ を求めよう.
2. ポテンシャル $U(x) = 2x^2 - 6x - 8$ のもとで質量 $m = \frac{1}{2}$ の物体が運動している.
   1. 物体の受ける力 $F(x)$ を求めよう.
   2. 物体の座標 $x(t) = 9\cos(2\sqrt{2}t + 7) + \frac{3}{2}$ が運動方程式を満たしていることを示そう.
   3. 物体が上の座標 $x(t)$ に従って運動するとき, 時刻 t における運動エネルギー K, 位置エネルギー $U(x(t))$, 力学的エネルギー E を求めよう.

1. いま:アンケート?
2. 来週までに:e ラーニングシステムで予習復習