力学的エネルギー保存則の応用 ×2

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

力学 L02(2010-04-21 Wed)

今日の目標

1. 力学的エネルギー保存則を使って, 運動方程式を解かずに答えを求めよう!
2. 力学的エネルギー保存則を使って, 運動方程式を解かずに物体の運命を知ろう!

http://hig3.net

Quiz L01 略解

L01.1 $U(x) = -\int_0^x F(s)\,\mathrm{d}s = \frac{3}{2}(\mathrm{e}^{-2x} - 1)$.

L01.2.1 $F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x) = -4x + 6$.

L01.2.2 左辺 $= m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{1}{2} \times 9 \times (-8)\cos(2\sqrt{2}t + 7)$.

左辺 $= -4x(t) - 6 = -36\cos(2\sqrt{2}t + 7)$.

L01.2.3 運動エネルギー $K = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot 9^2 \cdot 8\sin^2(2\sqrt{2}t + 7)$.

位置エネルギー

$U(x(t)) = 2(x(t) - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{2} - 8 = 2 \cdot 9^2\cos^2(2\sqrt{2}t + 7) - \frac{9}{2} - 8$.

力学的エネルギー $E = K + U(x) = 2 \cdot 81 - 8 - \frac{9}{2} = \frac{299}{2}$.

力学的エネルギー保存則

力学的エネルギーの値は一定

保存力を受けて運動する物体に対して 高木 I §3.5

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + U(x(t)) = E(\text{時間 } t \text{ によらず一定})$$

- 運動エネルギー $K = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2$
- 位置エネルギー or ポテンシャル (エネルギー) $U(x) = -\int_0^x F(s)\,\mathrm{d}s$.
- $\rightsquigarrow$ 力 $F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x)$.
- 力学的エネルギー $K + U$

例題 (先週の例題 2nd season)

質量 $m = 2$ の物体が, ばね定数 $k = 4$ のばねにつながれ, 直線上を運動している. 時刻 t の自然長からのずれを $x(t)$ とする (のびる方向が正). 時刻 $t = 0$ に, 3 だけのばして静かに手を放した. ~~その後の運動?~~

最初に自然長の位置 $x = 0$ に戻ってきたときの速度を求めよう

物理数学 II のりの解答 $x = e^{\lambda t}$ とおく, を忘れた人は惨敗.

力学のりの解答: 2 個の重要な場面をイメージしよう

これからは微分も積分もいらない〜(うそ)

やってみよう

例題 (変なばね)

質量 $m = 2$ の物体が, 復元力が $F(x) = -kx^3 = -4x^3$ で与えられる (フックの法則に従わない) 変なばねにつながれ, 直線上を運動している. 時刻 t の自然長からのずれを $x(t)$ とする (のびる方向が正). 時刻 $t = 0$ に, 速度 3 で自然長の位置から打ち出した. $\boxed{\text{いちばんのびたときののびは?}}$

微分も積分もいらないけど常識 (物理?) はいる〜

いくつも (保存) 力があるとき

$\boxed{\text{合力}}$:力のベクトルとしての和を考える. 斜面の悪夢. 間違えそう. 物理数学

合力の位置エネルギー

力 F_1, F_2 の位置エネルギー $U_1(x), U_2(x)$ とする.

$$U_1(x) = -\int_0^x F_1(s)\,\mathrm{d}s, \quad U_2(x) = -\int_0^x F_2(s)\,\mathrm{d}s.$$

合力 $F = F_1 + F_2$ の位置エネルギー $U(x)$ は (スカラーとしての) 和

$$U(x) = -\int_0^x F(s)\,\mathrm{d}s$$

$$= \boxed{}.$$

例題 (重力 + ばねの力)

自然長 ℓ , ばね定数 k の (質量を無視できる) ばねの一端を天井に固定する. 質量 m の球をつるし, 上下方向にのみ運動させる.
鉛直下向きに x 座標をとり, 天井を原点とする. 時刻を t とする. 重力加速度の大きさを g とする.

1. 重力の位置エネルギー $U_1(x)$, ばねの力の位置エネルギー $U_2(x)$ を求めよう.
2. 物体の力学的エネルギー保存則を書こう.
3. 物体をつりあいの位置から少し持ち上げ, $x = x_0$ にもってきて, 静かに手をはなしたところ物体は振動を始めた. 物体がいちばん下まで来たときの位置 x_1 を求めよう.

この方法のいいところ・いまいちなところ

この方法の長所=運動方程式を解く方法の短所

- 運動方程式を解かなくていい
-
- 2 つ以上の力があっても簡単. 位置エネルギーは (スカラーとしての) 和でいい.

この方法の短所=運動方程式を解く方法の長所

- 運動を求めよう (つまり, $x(t)$ を求めよう) という問には答えられない
- 時刻を指定した, または時刻を問う問題には答えられない
- (だって $K = \frac{1}{2}|v^2|$.)

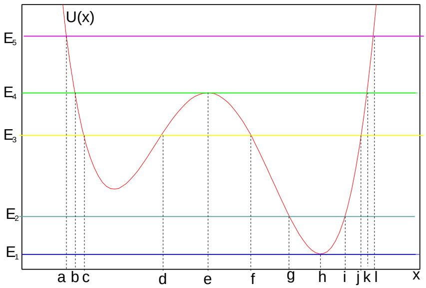
ジェットコースター詐欺を見破れ!!

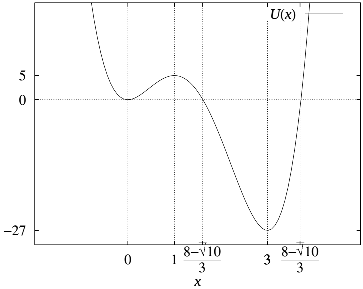
高木 I にはあまり書いてない.
復習: 物体は $U(x)$ の小さい側に向いた力を受ける. 曲線 $y = U(x)$ の形の坂で重力を受けてるようなもの.

ポテンシャルからさらにわかること

$$E - U(x(t)) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2 \geq 0$$

-
-
- 物体は $-\frac{dU}{dx}(x_0) = 0$ であるような点 x_0 では力を受けない (平衡点). しかも $E = U(x_0)$ ならずっとそこに静止できる.



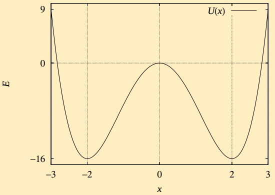


例題 (物体の運命)

$E = E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ のとき物体はどのように運動するか?

Quiz (複雑なポテンシャル)

直線上を運動する質量 $m = 2$ の質点を考える. 直線上に x 座標をとる. 位置エネルギーは $U(x) = x^4 - 8x^2$ である. 関数 $U(x)$ のグラフは図のようになる. エネルギー保存則を利用して答えよう.



1. 質点のうける力 $F(x)$ を求めよう.
2. 平衡点をすべて求めよう.
3. 時刻 $t = 0$ には, 質点の位置は $x(0) = -2$, 速度は $\frac{dx}{dt}(0) = -2$ だった. 時間 $t > 0$ に質点が運動する範囲と, 運動の様子を答えよう.
4. 時刻 $t = 0$ には, 質点の位置は $x(0) = -2$, 速度は $\frac{dx}{dt}(0) = -2$ だった. 位置 $x = -\sqrt{3}$ を通過するときの速度を求めよう.
5. 時刻 $t = 0$ に, 位置 $x(0) = -2$ から出発した質点が, $t > 0$ のどこかの時点で, 位置 $x = \sqrt{6}$ に到達する, あるいは通過するためには, 初速度 $\frac{dx}{dt}(0)$ はどのような範囲の値でなくてはならないか,

教科書のお奨め問題

高木 I 演習問題 [3][5][9](p.116,117)