力のモーメントと角運動量

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

力学 L03(2010-04-28 Wed)

今日の目標

1. ベクトルの外積って?(復習)
2. 力のモーメントって?(復習)
3. 角運動量って?
4. 角運動量と力のモーメントの関係は?

http://hig3.net

Quiz L02 の略解 I

1. $F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x) = -4x^3 + 16x = -4x(x+2)(x-2)$.
2. $F(x) = 0$ となる点なので, $x = 0, \pm 2$.
3. 力学的エネルギー E , 速度を $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ として,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-2)^2 + U(-2) = -12.$$

質点が運動できる範囲は, $\frac{1}{2}mv^2 = E - U(x) \geq 0$ を満たす必要があるので, $-\sqrt{6} \leq x \leq -\sqrt{2}$ または $\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{6}$. しかし, $x = -2$ から出発するので, $x = -\sqrt{6}$ と $x = -\sqrt{2}$ の間の往復運動になる.

4.

Quiz L02 の略解 II

5

外積 (ベクトル積)

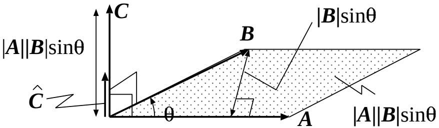
物理数学 I, ベクトル解析, 高木 I p.126

2 つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ に対して, 次の式で表わされるベクトル $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ のことを 外積 という. この記号 '×' は新しい記号. (実数のふつうの 'かける' とたまたま同じ文字).

ただし, $\hat{\boldsymbol{C}}$ は, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の両方に垂直な単位ベクトル (つまり $|\hat{\boldsymbol{C}}| = 1$) で, $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \hat{\boldsymbol{C}} \rangle$ が右手系をなすようなもの.

別の言い方

$\boldsymbol{C} \perp \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C} \perp \boldsymbol{B}$ で, $\boldsymbol{C}$ の向きは, $\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ に回る右ねじが進む向き.



大きさは $|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\theta = \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ のはる平行四辺形の面積.

外積を含む計算

ふつうの数であるかのように分配, 展開, スカラー倍して計算してよい. ただし,

大注意 $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

超注意 $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ ($\sin\theta = 0$ だから)

計算例 $(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} - 2\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$

積の微分法

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}(t) \times \boldsymbol{B}(t)) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}(t) \times \boldsymbol{B}(t) + \boldsymbol{A}(t) \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}(t)$$

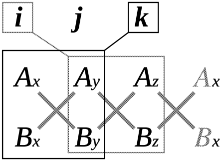
(次に出てくる) 成分で計算してチェックできる.

外積 $A \times B$ の成分表示

実際に計算するときは成分表示でやることも多い.
$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z), \boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ のとき,

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_y B_z - A_z B_y, \quad A_z B_x - A_x B_z, \quad A_x B_y - A_y B_x).$$

x, y, z が に入れ替わってることに注意.
$x \to y \to z \to x$.

覚え方 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} =$ 

$$= \left(\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \right)$$

Example 1

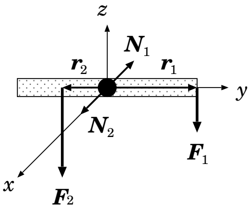
$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ +5 \end{pmatrix}$ に対して, 外積 $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$ を計算しよう.

フレミングの左手の法則やローレンツ力は, 外積で簡単に書ける:
$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$.

やじろべえのつりあい
やじろべえって英語では balancing toy

右の図のような原点で支えられたやじろべえが回転しない (つりあいの状態にある) 条件は,

$$\boxed{}\,.$$



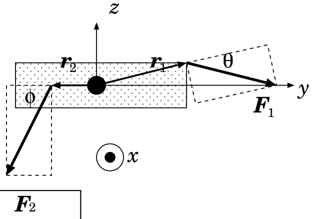
“てこの原理”
じゃあ, 斜めに引っ張る場合は?

やじろべえいじめ

$\boldsymbol{F}_1$ を, $\boldsymbol{r}_1$ に平行, 垂直に分解して得られるベクトルを $\boldsymbol{F}_{1\parallel}, \boldsymbol{F}_{1\perp}$ とする.
垂直なベクトル $\boldsymbol{F}_{1\perp}, \boldsymbol{F}_{2\perp}$ がやじろべえの動きに効く. つりあいの条件は

$$|\boldsymbol{F}_{1\perp}| : |\boldsymbol{F}_{2\perp}| = |\boldsymbol{r}_2| : |\boldsymbol{r}_1|.$$

つまり



実は, これはベクトルの外積を使うと便利に書ける.
点 $\boldsymbol{r}$ に力 $\boldsymbol{F}$ がはたらいているとき,

(原点のまわりの) 力のモーメント

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \qquad \text{外積}$$

これは, やじろべえを回転させようとするはたらきの大きさ (と向き) を表す.
n 個の点に力がはたらいているとき, つりあいの条件は,

の和がゼロになること: 上の $n = 2$ 個の力の場合には,

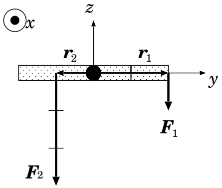
$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0}.$$

ここで, 外積の定義を使う. $\boldsymbol{i}$ を x 軸方向の基本ベクトルとして,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0} =& |\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{F}_1|(\sin\theta)(-\boldsymbol{i}) + |\boldsymbol{r}_2||\boldsymbol{F}_2|(\sin\phi)(+\boldsymbol{i}) \\ =& (-|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{F}_1|\sin\theta + |\boldsymbol{r}_2||\boldsymbol{F}_2|\sin\phi)\boldsymbol{i} \quad \text{さっきのつりあいの式!} \end{aligned}$$

それじゃあどっちに回る?

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N} &= \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\neq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

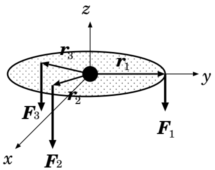


で，つりあっていないので回転する．でも，どっちに?

回転の向き

- 回転軸は $\boldsymbol{N}$ に平行.
- 回転の向き (図で, 時計回りまたは反時計回り) は, $\boldsymbol{N}$ 向きに進む［　　　　］の回る向き.

モビールはどっちに傾く？



立体的なやじろべえのときも同じ.
$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$ ならつりあってる.
$\boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{0}$ なら,

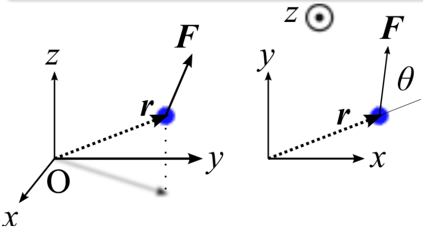
- 回転軸は $\boldsymbol{N}$ に平行.
- 回転の向き (図で, 時計回りまたは反時計回り) は, $\boldsymbol{N}$ 向きに進む $\boxed{}$ の回る向き.

質点の受ける力のモーメント

回転軸や板ややじろべえがなくても, 空間内を運動する質点が受ける (原点 O のまわりの) $\boxed{\text{力のモーメント}}$ または $\boxed{\text{トルク}}$ として, 次のベクトルを考えることができる.

質点の受ける力のモーメントの定義

$$\boldsymbol{N}(t) = \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{F}(t)$$



原点 O のまわりを回転させようとするはたらきの大きさ (と向き).
大きさ: $|\boldsymbol{N}|$, 向き: $\boldsymbol{N}$ に進む右ねじが回る向き.
スペースシャトルに地球のまわりを回転させようとする, みたいな.

運動量

物体の運動量

$$\boldsymbol{p}(t) = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \left(m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t), m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t), m\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right)$$

. ここで t:時刻, m:質量, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$:物体の位置.

$\boxed{\boxed{\text{運動量}}}$は$\boxed{}$みたいなもの.

運動方程式 $m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{F}(t)$ を $\boldsymbol{p}$ で書き直すと,

運動量で書いた運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}.$$

だって, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}) = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$.

運動量 (物体の進む勢い) の変化率は力に等しい

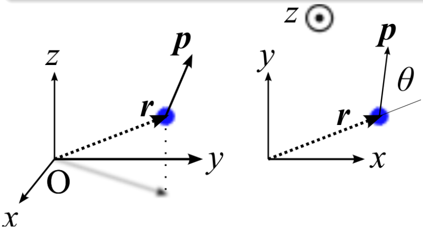
角運動量

回転軸や板ややじろべえがなくても, 物体が (原点 O のまわりを) 回転する勢いとして次のベクトルを考えることができる.

原点 O のまわりの角運動量

$$\boldsymbol{L}(t) = \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{p}(t).$$

$\boldsymbol{r}(t)$: 時刻 t における位置, $\boldsymbol{p}(t)$: 時刻 t における運動量



スペースシャトルが地球の (中心の) まわりを回る勢い, みたいなことって想像できるでしょ.

大きさ: $|\boldsymbol{p}|$, 向き:$\boldsymbol{p}$ に進む右ねじが回る向き.

面積速度

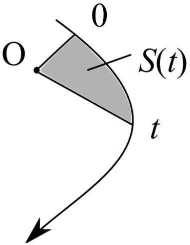
面積速度

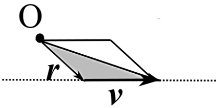
$$= \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}(t)$$

=三角形の面積

$$= \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad} .$$





Example 2 (角運動量)

次の場合に, 物体の原点のまわりの角運動量を成分表示で求めよう.

1. 時刻 t における位置が $\boldsymbol{r}(t) = (-3t^3, 5, 0)$ で与えられる, 質量 2 の物体.
2. 時刻 t における位置が $\boldsymbol{r}(t) = (-3t + 2, 5t - 3, 2t)$ で与えられる, 質量 2 の物体.
3. 原点を中心として, 半径 3, 角速度 2 で xy 平面内を時計回りに等速円運動する質量 5 の物体.

角運動量の満たす微分方程式

角運動量の変化率

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{N}(t)$$

これは, 運動方程式から導ける. 実際,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}) \\ &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \\ &= \boldsymbol{0}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \\ &= \boldsymbol{N}.\end{aligned}$$

- 1 から 2 行目へ: (外) 積の微分法
- 2 から 3 行目へ: $\boxed{}$ と $\boldsymbol{p} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$
- 2 から 3 行目へ: 運動方程式
- 3 から 4 行目へ: 力のモーメントの定義

角運動量 (物体の回転する勢い) の変化率は力のモーメントに等しい.

まとめみたいな?

	直線	回転
勢い	運動量 $\boldsymbol{p} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$	角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$
大きさ	$\lvert\boldsymbol{p}\rvert$	$\lvert\boldsymbol{L}\rvert$
向き	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{L}$ に進む右ねじの回る向き
はたらき	力 $\boldsymbol{F}$	力のモーメント $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
微分方程式	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{N}$

Quiz

質量 $m = 3$ の物体が, 力のモーメント $\boldsymbol{N}$ をうけつつ運動している. 時刻 t における物体の位置は $\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t, 2\sin t, \sin t)$ で与えられる.

1. 時刻 t における運動量 $\boldsymbol{p}(t)$ を求めよう.
2. 時刻 t における原点 O のまわりの角運動量 $\boldsymbol{L}(t)$ を求めよう.
3. 時刻 t において物体が受ける原点 O のまわりの力のモーメント $\boldsymbol{N}(t)$ を求めよう.

教科書のお奨め問題

高木 I 例題 [6.4](p.129)

高木 I 演習問題 [4][5][8](p.137–139)

テキスト入荷!

高木, 力学 (II), 裳華房 (2001) より引用 後半で使うので買っておいてね.