中心力場と角運動量保存則

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

力学 L04(2010-05-12 Wed)

今日の目標

1. 中心力場って何?
2. ケプラーの第 1 法則って何?
3. ケプラーの第 2 法則って何?

http://hig3.net

QuizL03 略解

1. $\boldsymbol{p}(t) = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = (-9\sin t, 6\cos t, 3\cos t)$.
2. $\boldsymbol{L}(t) = \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{p}(t) = (0, -9, 18)$.
3. $\boldsymbol{N}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{0}$.

別解 (面倒) $\boldsymbol{F}(t) = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = (-9\cos t, -6\sin t, -3\sin t)$.
$\boldsymbol{N}(t) = \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{F}(t) = \cdots = \boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{F}$ が平行であることからもわかる).

ベクトルを太字や矢印で区別していないものは減点しました.
ひとつの問題・計算の中では, ベクトルは縦ベクトルか横ベクトルかを統一しよう. 問題文にあわせて答えるのが礼儀.

前回のまとめみたいな?

	直線	回転
勢い	運動量 $\boldsymbol{p} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$	角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$
大きさ	$\lvert\boldsymbol{p}\rvert$	$\lvert\boldsymbol{L}\rvert$
向き	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{L}$ に進む右ねじの回る向き
はたらき	力 $\boldsymbol{F}$	力のモーメント $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
微分方程式	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{N}$

面積速度

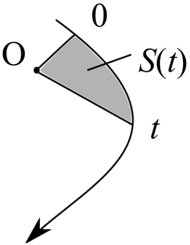
面積速度

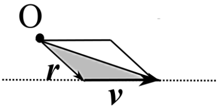
$$= \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}(t)$$

$=$三角形の面積

$$= \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad\qquad}.$$





こんな場合の角運動量は?

質量 m.
外積を使った計算と面積速度の考えの両方で, $|\boldsymbol{L}|$ を求めてみよう.
半径 a 周期 T の等速円運動

半径 r 角速度 ω の等速円運動

$\boldsymbol{r}(t) = (vt, a, 0)$

力の場 (ベクトル場の例)

位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ においた物体が力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を受けるとき, ベクトル場

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$$

を $\boxed{\text{力 (の) 場}}$ という.

ベクトル解析

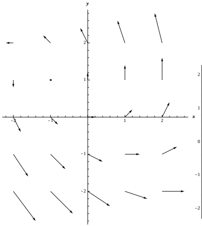
例 1: へんな力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (-y, x^2 + y, 3z)$.

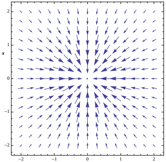
例 2: 3 次元調和振動子 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (-kx, -ky, -kz) = -k\boldsymbol{r}$.　$(k > 0)$

例 3: 重力場あとで詳しくやります.

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \left(-\frac{GMmx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, -\frac{GMmy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, -\frac{GMmz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$.

ベクトル場の例





例題 1

質量 $m = 2$ の物体が, 力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$, 初期条件 $\boldsymbol{r}(0) = (3, 0, 0)$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(0) = (0, 2, 1)$ のもとで運動している. 時刻 t における位置 $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよう. ただし, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (-2x, -2y, -2z)$.

中心力場

中心力場

力 (力の場) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が中心力 (中心力場) であるとは 高木 I §6.1

- 向きが $\boldsymbol{r}$ に平行である: $\boldsymbol{F} \parallel \boldsymbol{r}$ つまり $\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$.
- 大きさ $|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})|$ が $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ だけの関数である (向きにはよらない): $|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})| = (\pm 1) \times f(r)$.

中心力場の例

例 1
$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -3r^2\boldsymbol{r}$ は中心力場

- ○ $-3r^2\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$
- ○ $|-3r^2\boldsymbol{r}| = 3r^2|\boldsymbol{r}| = 3r^3$.

例 2 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (-y, x, z)$ は中心力場でない.

- × $\boldsymbol{F}(r) \times \boldsymbol{r} = (-y, x, z) \times (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.
- ○ $|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})| = \sqrt{(-y)^2 + x^2 + z^2} = r$.

例 3 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -x^2(x, y, z)$ は中心力場でない.

- ○ $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{r} = -x^2(x, y, z) \times (x, y, z) = (0, 0, 0)$.
- × $|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})| = -x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \neq f(r)$.

例 4 さっきのへんな力も中心力場でない.

中心力場の一般的な形

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r} = |f(r)|(\pm 1)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

.

$|f(r)|$: 力の大きさ.

$f(r) > 0$ なら $\boxed{}$ (せきりょく), $f(r) < 0$ なら $\boxed{}$

$(\pm 1)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$: 力の向きを表す単位ベクトル

復習 高木 I p.119 物理数学 I

ベクトル $\boldsymbol{A}$ と同じ向きの単位ベクトル (長さ 1 のベクトル) は $\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$.

なぜなら $\left|\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}\right| = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}|\boldsymbol{A}| = 1.$

中心力の例: 重力, 静電力, ...

中心力場の例:重力場

高木 I p.97

原点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ に質量 M の物体が静止しているとき, 位置 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ にある質量 m の物体が受ける重力 (万有引力) は

1. 向きは原点向き (引力)
2. 大きさは m, M に比例, $r=|\boldsymbol{r}|$ の 2 乗に反比例 ($\boxed{}$ という) $\frac{GMm}{r^2}$. 比例定数 $G=6.673\times10^{-11}\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}/\mathrm{s}^2$ は万有引力定数.

見るからに中心力場

数式で書いてみよう

原点向き単位ベクトル $-\frac{\boldsymbol{r}}{r}$.

大きさ $\frac{GMm}{|\boldsymbol{r}|^2}$.

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=\frac{GMm}{r^2}\times\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=-\frac{GMm}{x^2+y^2+z^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)$$

ケプラーの第 2 法則 (中心力場の性質)

中心力場では $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \overset{!}{=} \boldsymbol{0}$.

まとめみたいな?

	直線	回転
微分方程式	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{N}$
保存則	$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ のとき $\boldsymbol{p}$ 一定 (運動量保存則=ニュートンの運動の第一法則)	$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$ のとき $\boldsymbol{L}$ 一定 (角運動量保存則)

ケプラーの第 2 法則=面積速度一定の法則

高木 I p.124,p.129,p.130 中心力場のもとで運動する物体

の $\boxed{}$

ケプラーの第 2 法則の応用

Example 1

1. ハレー彗星の軌道は $a_{\mathrm{A}} = 5.2 \times 10^{12}\mathrm{m}$, $a_{\mathrm{P}} = 8.8 \times 10^{10}\mathrm{m}$. 速さは, どっちにいるときが何倍大きい?
2. 上の問で, $10^{11}\mathrm{m}$ のときは?
3. 地球は半径 $a_{\mathrm{E}} = 1.5 \times 10^{11}\mathrm{m}$, 木星は半径 $a_{\mathrm{J}} = 7.8 \times 10^{11}\mathrm{m}$ の円軌道. どっちの速さが何倍大きい?

ケプラーの第 1 法則 (中心力場の性質)

ケプラーの第 1 法則の半分

中心力場のもとでの物体の運動は原点を含み $\boldsymbol{L}$ に垂直な一平面内に限られる.

$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{r} = \boxed{} = \boxed{} = 0.$

$\boxed{}$ は cyclic に回しても同じ値　物理数学 I

$L_x x + L_y y + L_z z = 0$ は平面の方程式.
直観的にもわかる.

$\boldsymbol{L} = 0$ のときは? $\boxed{}$

Quiz 1

1. 次の力の場は中心力場か?
   1. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (x^3, y^3, z^3)$
   2. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (x^3, y^3, z^3) + (xy^2 + xz^2, x^2y + yz^2, x^2z + y^2z)$.
2. 次の力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を x, y, z の式で書こう: '大きさが r に反比例する斥力である中心力場'
3. 中心力場 のもとで質量 $m = 3$ の物体が運動している. 初期条件は $\boldsymbol{r}(0) = (1, 2, 3)$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(0) = (4, 5, 6)$ だった. 物体の軌跡を含む平面の式を求めよう.

教科書のお奨め問題

高木 I 演習問題 [3](p.137)

数値計算法演習の連絡今週こそイヤフォンもって来て〜

ひっそりとプチテスト計画 2010-06-09 水 3. 持込無し.

テキスト入荷!

高木, 力学 (II), 裳華房 (2001) より引用 後半で使うので買っておいてね.