重力場のもとでの運動

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

力学 L05(2010-05-26 Wed)

今日の目標

1. ケプラーの 3 法則ってどんな話?
2. 楕円ってどんな形?
3. 極座標で速度はどんな式?

http://hig3.net

Quiz の略解

1.
   1. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{r} = (x^3, y^3, z^3) \times (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ なので, 中心力場ではない. ちなみに $|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})|$ は r だけの関数ではない.
   2. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (x^2 + y^2 + z^2)(x, y, z) = r^2\boldsymbol{r}$. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, $|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})| = r^3$ より中心力.
2. $f(r) = C/r$, 斥力なので 定数 $C > 0$. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = Cr^{-2}\boldsymbol{r}$.
3. $\boldsymbol{L}(0) = \boldsymbol{r}(0) \times 3\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(0) = (1, 2, 3) \times (4, 5, 6) = 3(-3, 6, -3)$. 中心力場なので $\boldsymbol{L}$ は保存する. よって $(-3, 6, -3) \cdot (x(t), y(t), z(t)) = 0$. つまり $x - 2y + z = 0$ が平面の式.

ケプラーの法則

高木 I p.124

ケプラーの 3 法則は, 惑星が太陽 (M) の重力場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ のもとで

(これは $\boxed{}$ ⇒ $\boxed{}$ が保存)

ニュートンの運動方程式に従って運動していることから導かれる.

大注意

太陽 → 地球

惑星 → 月, 人工衛星, 国際宇宙ステーション

などと読み替えても正しい. 要するに 1 個の大きな質量のまわりの運動についての法則.

ケプラーの第 1 法則

惑星は, 太陽をひとつの焦点とする楕円軌道上を運動する.

角運動量保存則より, 平面 $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{r} = 0$ 上の運動であることは先週に示した.

楕円であることは今後示す (かも?)

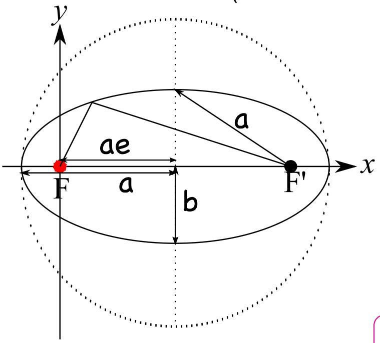
楕円ってどんな形?

焦点 F, F′. F = 原点=太陽=力の中心

軌跡 FP + F′P = 2a (定数)

a, e, 短半径 $b = a(1-e^2)^{1/2}$. $0 \le e < 1$.

$e = 0$ のとき真円. (実は $e = 1$ 放物線, $e > 1$ 双曲線)



高木 I p.135

例題 1 (楕円ってどんな形?)

1. 長半径 $a = 3$(cm), 離心率 $e = 0.2$ の楕円を描いてみよう
2. 長半径 $a = 3$, 離心率 $e = 0.2$ の楕円の式を求めよう. ただし, xy 平面上で, 長半径が x 軸に平行, 原点が焦点のひとつであるとしよう.
3. ハレー彗星の楕円軌道は, 太陽に最も近づたときの距離 (近日点距離) が 8.9$\times 10^{10}$km, 太陽から最も離れたときの点 (遠日点距離) が 5.8$\times 10^{12}$km. 長半径と離心率を求めよう.

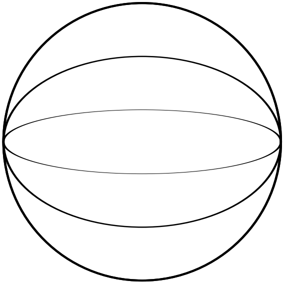
ケプラーの第 2 法則

惑星の, 太陽のまわりの面積速度は一定である.

$|\boldsymbol{L}| = 2m\times$ 面積速度. 角運動量は保存する.

ケプラー第 3 法則

惑星の楕円軌道の $\boxed{\text{長半径}}$ の 3 乗と, 惑星の $\boxed{\text{軌道周期}}$ の 2 乗の比は, すべての惑星に共通な定数である.



角速度 ω, 半径 r の等速円運動の場合

$$\text{質量} \times \text{加速度} = mr\omega^2 = \frac{GMm}{r^2}$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ (T:周期) より,

$r^3 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = GM.$

実は, 楕円軌道のとき, 離心率と無関係に, 長半径 a だけから,

$a^3 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = GM.$

例題 2 (ケプラーの第 3 法則の応用)

1. 太陽のまわりを運動する木星の軌道周期は *12* 年. 木星の軌道の長半径は, 地球の軌道の長半径 *(1AU=1* 天文単位という*)* の何倍*?*
2. 地球のまわりを運動するひまわりの軌道の長半径は, 月の軌道の長半径の何倍*?*

1 次元のエネルギー保存則の復習

保存力 $F(x)$ のもとでの運動に対して, 力学的エネルギーが保存する.

$$K + U(x) = E.$$

ここで

$$K = \frac{1}{2} m \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \right)^2,$$

$$U(x) = -\int_0^x F(s)\mathrm{d}s \Leftrightarrow F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x).$$

別に下限は 0 でなくても定数 $x = x_0$ でよかった. だって,

$$-U_{\mathrm{new}}(x) = \int_{x_0}^x F(s)\mathrm{d}s$$

$$= +\int_{x_0}^0 F(s)\mathrm{d}s + \int_0^x F(s)\mathrm{d}s = C - U(x)$$

. どうせ $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ したら同じだし〜

3 次元のエネルギー保存則

保存力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ のもとでの運動
(3 次元の保存力って? 位置エネルギー (ポテンシャル) $U(\boldsymbol{r})$ で $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{r}) = -(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z})$ と書ける力. 待て次週)　ベクトル解析

$$K + U(\boldsymbol{r}) = E.$$

ここで,

$$K = \frac{1}{2} m \left| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) \right|^2, \quad \text{絶対値の 2 乗}$$

$$U(\boldsymbol{r}_1) = -\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \quad \boxed{\text{線積分}}$$

ただし, C は定点 $\boldsymbol{r}_0$ から $\boldsymbol{r}_1$ に至る積分路.　ベクトル解析
重力場の場合, $\boldsymbol{r}_0 = \infty = (+\infty, 0, 0)$ ととるのが普通.
この 1 ページではいろいろ隠していることがある. 待て次週 (のベクトル解析)

重力場のポテンシャル $U(r)$ を求めよう

重力ポテンシャル

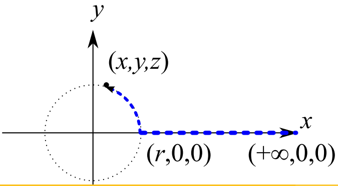
原点に静止した質量 M の作る重力場のポテンシャルは 高木 I p.101(5.17)

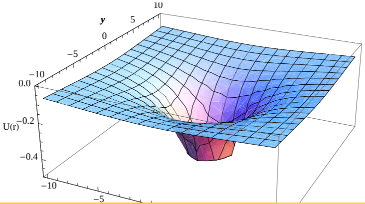
$$U(r) = -\frac{GMm}{r}, \quad (r = |\boldsymbol{r}|).$$

まず, 中心力場なので, $U(\boldsymbol{r}) \rightsquigarrow U(r)$.

なぜなら下の積分路で, 球面上の部分は $\boxed{}$ だから.

積分路のうち x 軸上の部分のパラメタ表示. $\boldsymbol{r}(t) = (-t, 0, 0)$.
$(-\infty < t < -r_1)$





積分路のうち x 軸上の部分のパラメタ表示. $\boldsymbol{r}(t) = (-t, 0, 0)$.
$(-\infty < t < -r_1)$

$$
\begin{aligned}
U(\boldsymbol{r}_1) &= U(r_1, 0, 0) \\
&= -\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \\
&= \\
&= \left[\frac{GMm}{t}\right]_{-\infty}^{-r_1} = -\frac{GMm}{r_1}.
\end{aligned}
$$

覚え方: .

例題 3 (第 2 宇宙速度 (脱出速度))

物体は $E \le U(r)$ のところにしか行けないのだった.

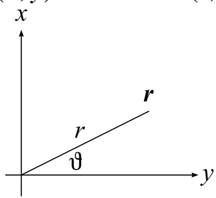
1. どこにでも行けるには E はどれだけあったらいい?
2. M を地球とする. 上で求めた力学的エネルギー E を持たせるためには, 地表面上にある物体は, どれだけの速さを持っている必要があるか? 地球の半径は
   $R = 6.4 \times 10^6 \mathrm{m}. G = 6.7 \times 10^{-11} \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2}, M = 6.0 \times 10^{24} \mathrm{kg}.$

この速さが, 地表面から出発して地球の '重力圏を離れる'(いいかげんな用語) のに必要な速さ = $\boxed{\text{第 2 宇宙速度}}$ = $\boxed{\text{脱出速度}}$. 実際には地球の '重力圏を離れ' ても太陽からは離れられないので '人工惑星になるのに必要な速さ' とも言われる.

極座標

xy 平面内の運動を考えよう. 直交座標 $(x, y) \leftrightarrow$ 極座標 (r, θ).

$$
\begin{aligned}
x(t) &= r(t)\cos(\theta(t)) \\
y(t) &= r(t)\sin(\theta(t)) \\
z(t) &= 0
\end{aligned}
$$



両辺を $' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ して,

$$
\begin{aligned}
x' &= r'\cos(\theta) - r\theta'\sin(\theta) \\
y' &= r'\sin(\theta) + r\theta'\cos(\theta) \\
z' &= 0.
\end{aligned}
$$

外積を計算して,

極座標での角運動量

$\boldsymbol{L} = \boxed{}.$

もうちょっと意味わかりたいな〜

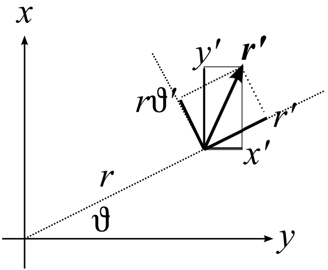
θ だけ回転した座標系にうつる．

速度 $\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r' \\ r\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix}$ 　方向の速度 角度方向の速度

位置 $\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ 　座標

極座標でのエネルギー

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m \left| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) \\ &= \frac{1}{2} m (v_r^2 + v_\theta^2) \\ &= \frac{1}{2} m (r'^2 + (r\theta')^2). \end{aligned}$$



重力場のもとで運動する物体の 2 つの保存量

軌道平面を xy 平面 $(z=0)$ にとる ($\leftsquigarrow$ ケプラーの第 1 法則)
エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{GMm}{|\boldsymbol{r}|} = E.$$

$$\boxed{\frac{1}{2}m(r'^2 + r^2\theta'^2) - \frac{GMm}{r} = E.}$$

角運動量保存則

$$m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{L}$$

$$\boxed{r^2\theta' = h(= \frac{|\boldsymbol{L}|}{m})}$$

'角' で θ' を r で表して 'エ' に代入.

$$\frac{1}{2}mr'^2 + \frac{mh^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r} = E.$$

有効ポテンシャル $U_{\mathrm{eff}}(r) = \frac{mh^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r}$ で, 1 変数 r: 1 次元の問題と思える.
待て次週.

Quiz 1

質量 M の物体の作る重力場中で, 質量 m の物体が半径 a の等速円運動をしている.

1. 運動方程式から, 物体の速さ v を求めよう. *Hint.* 向心加速度の大きさ $= v^2/a$.
2. 物体の運動エネルギー, 位置エネルギー, 物体の力学的エネルギーを求めて G, M, m, a で表そう.

M が地球の質量, a が地球の半径 (地球の中心から地表面までの距離) としたとき, この v を 第 *1* 宇宙速度 という. これが人工衛星にするために必要な最低限の速さ.

教科書のお奨め問題 高木 I 演習問題 [6](p.117), [3](p.137), [5][7](p.138)

プチテストやります! 2010-06-09 水 3. 科目の成績中 30 点分. 持込無.
教育実習, 介護実習, 就職活動, 病気などの欠席は不利にならないように扱います. 事後でもいいので証明できる書類をつけて欠席届を提出.
準備:まずは quiz が楽勝で解けるようになろう. 次に教科書のお奨め問題ができるようになろう.