極座標で中心力場

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

力学 L06(2010-06-02 Wed)

今日の目標

1. 中心力場の問題 (回転対称な問題) を 1 次元の問題に直して解析できる.
2. 動径方向の力学的エネルギー保存則から運動の様子が説明できる
3. 3 次元の力の場からポテンシャルエネルギーを (+その逆) 求められる

http://hig3.net

Quiz 略解

1. 等速円運動の向心加速度の大きさは $\frac{v^2}{a}$. 重力の大きさは $\frac{GMm}{a^2}$. 運動方程式 (で両辺それぞれ絶対値をとったもの) は

$$\frac{mv^2}{a} = \frac{GMm}{a^2}.$$

   よって, 速さは $v = \sqrt{GM/a}$.

2. 運動エネルギー $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2a}$. 位置エネルギー $U = -\frac{GMm}{a}$. 力学的エネルギー $E = K + U = -\frac{GMm}{2a}$.

実は楕円軌道のときも, 力学的エネルギーは長半径 a だけで (離心率 e によらずに) 決まり, $E = -\frac{GMm}{2a}$ で与えられることが知られている.

よくあった間違い

- $U = mgh$.
- $U = -\frac{GMm}{r}$.
- $U = +\frac{GMm}{a}$.
- $K = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{Gm}{a}}\right)^2$.

重力場のポテンシャルエネルギーは $U = mgh$ or $U = -GMm/r$?

歴史 (多少脚色あり)

1. 天文学者や占星術師が惑星運行データを集積
2. ケプラーがデータから惑星運動の 3 法則を提唱
3. 運動方程式と $|\boldsymbol{F}| = mg$ でケプラーの法則を説明できないか? $\rightsquigarrow$ 失敗
4. ニュートンが運動方程式と $\boxed{\text{万有引力の法則}}$ $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ からケプラーの法則が導けることを示した $\rightsquigarrow$ 貴族院議員に

たぶん, ニュートンの運動の 3 法則も同時に確立されたのだと思う.
リンゴをいつ見たかはよくわからない

じゃあ重力が $F = -mg$, $U = mgh$ は間違いか?

重力のポテンシャルエネルギー $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ を,
$r = R = 6.4 \times 10^6$m(地球の赤道半径) のまわりでテイラー展開. 地表面からの高さ $h = r - R$. ($h = x - a$ みたいなもの)

$$
\begin{aligned}
U(r) =& U(R) + \frac{U'(R)}{1!}(r - R) + O((r - R)^2). \\
=& U(R) + m \cdot \frac{GM}{R^2} h + O(h^2).
\end{aligned}
$$

ここで,

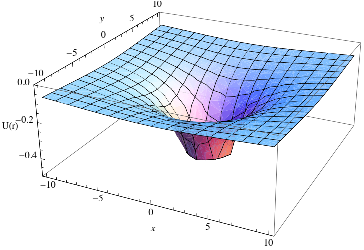
- 地球の半径 $R = 6.4 \times 10^6$m.
- 万有引力定数 $G = 6.7 \times 10^{-11}$N $\cdot$ m$^2 \cdot$ kg^{-2}.
- 地球の質量 $M = 6.0 \times 10^{24}$kg.

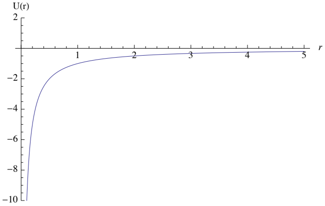
$\frac{GM}{R^2} =$ ______.

$U = mgh$ は, $U = -\frac{GMm}{r}$ を

重力場のもとでの運動の様子 1

物体は $E \leq U(\boldsymbol{r})$ のところにしか行けないのだった (⇝ 運動方程式の応用)





例題 1 (第 2 宇宙速度 (脱出速度))

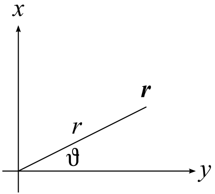
1. どこにでも行けるには E はどれだけあったらいい?
2. M を地球とする. 上で求めた力学的エネルギー E を持たせるためには, 地表面上にある物体は, どれだけの速さを持っている必要があるか? 地球の半径は $R = 6.4 \times 10^6 \mathrm{m}$. $G = 6.7 \times 10^{-11} \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2}$, $M = 6.0 \times 10^{24} \mathrm{kg}$.

この速さが, 地表面から出発して地球の ‘重力圏を離れる’(いいかげんな用語) のに必要な速さ=$\boxed{\text{第 2 宇宙速度}}$=$\boxed{\text{脱出速度}}$. 実際には地球の ‘重力圏を離れ’ ても太陽からは離れられないので ‘人工惑星になるのに必要な速さ’ とも言われる.

極座標

中心力場のもとでの運動は極座標を使うと便利. そんな気しない?
xy 平面内の運動を考えよう. 直交座標 $(x, y) \leftrightarrow$ 極座標 (r, θ).

$$\begin{aligned} x =& r\cos(\theta) \\ y =& r\sin(\theta) \\ z =& 0 \end{aligned}$$



両辺を $' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ して,

$$\begin{aligned} x' =& r'\cos(\theta) - r\theta'\sin(\theta) \\ y' =& r'\sin(\theta) + r\theta'\cos(\theta) \\ z' =& 0. \end{aligned}$$

外積を計算して,

極座標での角運動量

$\boldsymbol{L} = \boxed{}$.

もうちょっと意味わかりたいな〜

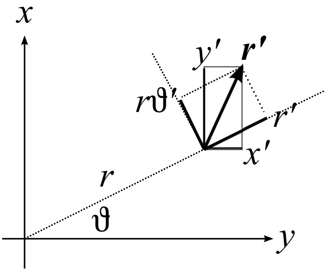
$-\theta$ だけ回転した座標系にうつる.

速度 $\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r' \\ r\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix}$ 動径方向の速度 角度方向の速度

位置 $\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ 動径座標

極座標での運動エネルギー

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}m\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|^2 \\
&= \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) \\
&= \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) \\
&= \frac{1}{2}m(r'^2 + (r\theta')^2).
\end{aligned}
$$



重力場のもとで運動する物体の 2 つの保存量

極座標で, 力学的エネルギー保存則と角運動量保存則を書こう.
中心力場なので E が保存. 中心力場なので $\boldsymbol{L}$ も保存. そこで軌道平面を xy 平面 $(z = 0)$ にとって極座標を使うと, 高木 I p.132,p.133

極座標での力学的エネルギー保存則と角運動量保存則

$$(\text{エ})\quad \frac{1}{2}m(r'^2 + r^2\theta'^2) - \frac{GMm}{r} = E. \qquad (\text{角})\quad r^2\theta' = h(= \frac{|\boldsymbol{L}|}{m})$$

角運動量保存則を解いて　　　　. エネルギー保存則に代入.

動径方向のエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mr'^2 + \frac{mh^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r} = E$$

有効ポテンシャル - 遠心力ポテンシャル

重力ポテンシャル　$U(r) = -\frac{GMm}{r}$

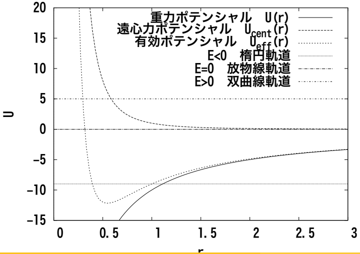
(定義) 遠心力ポテンシャル　$U_{\mathrm{cent}}(r) = \frac{mh^2}{2r^2}$

(定義) 有効ポテンシャル　$U_{\mathrm{eff}}(r) = U(r) + U_{\mathrm{cent}}(r) = +\frac{mh^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r}$

とすると,

$$\frac{1}{2}mr'^2 + U_{\mathrm{eff}}(r) = E.$$

r 軸を 1 次元運動する物体のエネルギー保存則と思える.



このとき物体の運動方程式は, 両辺を t で微分して,

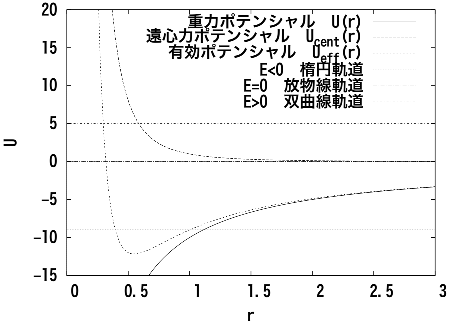
$$r'(mr''-m\frac{h^2}{r^3}+\frac{GMm}{r^2})=0$$

$$\text{動径方向の運動方程式}\quad mr''=-\frac{GMm}{r^2}+m\frac{h^2}{r^3}.$$

右辺第 2 項に出てきた人為的な項は, 遠心力と解釈できる.
円運動だと思えば $h=rv=r^2\omega$.
$m\frac{h^2}{r^3}=m\frac{(rv)^2}{r^3}=m\frac{v^2}{r}=mr\omega^2$
回転座標の方程式なので遠心力が現れた. $\boxed{\text{高木 I p.152}}$

あるいは U_{eff} には, 遠心力を出すための人為的な項 $U_{\text{cent}}(r)$ が付け加えられてる, と思ってもいい.

軌道のタイプの分類



- $E < 0$ 2 交点の間を往復運動 実は
- $E \geq 0$ 接近してきて 1 交点で再接近した後離れていく. 実は

$U(\infty) = 0$ となるようにエネルギーの原点をとったときの話.

本当に楕円/放物線/双曲線なの?(お話)

$$r' = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\mathrm{eff}}(r(t)))}$$

を r について解けば, $r = r(t)$ が求まる. そうしたら $\theta'(t) = h/r(t)^2$ を解いて $\theta(t)$ を求める.

$\rightsquigarrow$ 軌道の式 $r = r(\theta)$ $\rightsquigarrow$ 円錐曲線. 高木 I p.133–136

Example 1

重力のもとで, 物体が, 等速円運動をしている. 角運動量の大きさが mh で与えられるとき, 動径方向の運動方程式を用いて, 等速円運動の半径を求めよう.

3 次元のポテンシャル

3 次元の保存力場とポテンシャル

力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が, あるスカラー関数 $U(\boldsymbol{r})$ で　ベクトル解析

$$\boxed{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{r}) = -(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z})}$$

と書かれるとき, $\boxed{\text{保存力場}}$であるという. $U(\boldsymbol{r})$ をポテンシャル (エネルギー), 位置エネルギーという.

実用的判定方法:

$\boldsymbol{F}$ が保存力場 $\Leftrightarrow$ 回転がゼロ $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}) = \boldsymbol{0}$.

ベクトル解析

- 中心力場 $\Rightarrow$ 保存力場　先週
- 保存力場 $\Rightarrow$ 力学的エネルギーが保存
- 保存力場 $\Rightarrow$ 線積分でポテンシャルが求められる　先週

例

Quiz 1 (ポテンシャルから力を求めよう)

次のポテンシャルエネルギーから力の場を求めよう. $k, \boldsymbol{k} = (k_1, k_2, k_3)$ は定数, 定ベクトル.

1. $U(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}k|\boldsymbol{r}|^2$.
2. $U(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}$.

Quiz 2 (力からポテンシャルを求めよう)

次の力の場は保存的か? 保存的ならポテンシャルを求めよう. a, b, c は定数.

1. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (x, -z, y)$.
2. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (a, b, c)$.

中心力場は保存力場

中心力場のポテンシャル

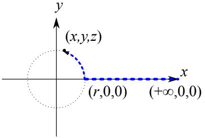
$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が中心力 $\Longleftrightarrow$ ポテンシャル $U(\boldsymbol{r})$ が $r = |\boldsymbol{r}|$ だけの関数 $U(r)$

ポテンシャルが $U(r)$ のとき $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) =$

よって中心力場

中心力場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ に対して, ポテンシャルは

$U(\boldsymbol{r_1}) = -\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int^{r_1} f(r)\mathrm{d}r$. ($|\boldsymbol{r_1}|$ だけの関数)



ベクトル解析と力学の記号の対応

ベクトル解析	力学
ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$	力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$
ポテンシャル (スカラー場) $f(\boldsymbol{r})$	ポテンシャル (エネルギー), 位置エネルギー $U(\boldsymbol{r})$
$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\nabla} f$, $f = \int \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U$, $U = -\int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$.
保存場の条件 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$ $\oint \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$	保存力の条件 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ $\oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$

プチテスト準備計画

これまでの分の正解は, 小テスト受験結果の点数のところをクリックすると見られます.
プチテストやります! 2010-06-09 水 3. 科目の成績中 30 点分. 持込無.
教育実習, 介護実習, 就職活動, 病気などの欠席は不利にならないように扱います. 事後でもいいので証明できる書類をつけて欠席届を提出.
出題計画 (一問ずつとはかぎりません)

- 力から位置エネルギーを, 位置エネルギーから力を求めよう (1 次元)!
- 力から位置エネルギーを, 位置エネルギーから力を求めよう (3 次元)!
- 力学的エネルギー保存則を利用して, 物体の速さや位置を楽に求めよう!
- 位置エネルギーのグラフの形と力学的エネルギーの値から, 力学的エネルギー保存則を利用して物体の運命を見定めよう!
- 力と物体の運動がわかっているときに, 物体の運動エネルギー, 位置エネルギー, 力学的エネルギーを求めよう!
- 物体の運動がわかっているときに角運動量を求めよう!
- 中心力場かどうか判定しよう! 保存力場かどうか判定しよう!
- 角運動量や力のモーメントに関する応用問題
- 角運動量保存則や面積速度一定の法則の応用問題
- ケプラーの第 3 法則の応用問題

予習復習問題今回は締切を 1 日繰り上げます. 2010-06-08 火 02:00 まで.
予定

1. 2010-06-12(土)3 授業あり
2. 2010-07-21(水) たぶん休講させていただきます
3. 2010-07-?? たぶん土曜日に 1 回補講. 2010-07-17,2010-07-24 など有力候補.
4. 2010-07-28(水)3 ファイナルトライアル

模範解答を作ろうプロジェクト!で最大 10 点ゲット!

力学のプチテストのシミュレーション問題の模範解答を作ってみんなで共有するプロジェクトです. その貢献に対して 1 問あたり最大 10 点, 1 人あたり最大 10 点の加算があります.
ReLS https://r-els.media.ryukoku.ac.jp → 力学 → プチテスト
に投稿されている問題に対して, 模範解答を紙に作成して, スキャンしたもの (後述) をフォーラムに返信してください. 最初の解答が完璧でなかった場合, 投稿した人, または他の人が修正したものを再投稿することができます.
最終的な完璧な答案を投稿した人よりも, 各難関ポイントを解決して貢献した人を評価して点数を決定します. 何人かの貢献で 1 問の最終的な答案が完成したら, 10 点がその人々に分配されます.
また, 独立に作成した投稿でも, 同じ内容なら, 一番最初に投稿した人のみを評価します.
問題はときどき追加します. フォーラムの右側ブロックで, ‘このフォーラムをメール購読する’ を選択すると, 問題が公開されたときにメールで通知を受けることができます.
スキャンは, 物理数学・演習 II のレポートと同じのりです. 自宅にスキャナがあればそれを使ってくれてもいいし, 3 号館地下第 2 セルフラーニング室や理工学部実習室 1-612 で簡単にスキャンできます.
http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/info/teaching/scanner.php