多体系の運動方程式と保存則

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

力学 L07(2010-06-12 Sat)
更新:Time-stamp: ”2010-06-12 Sat 16:37 JST hig”

今日の目標

1. 中心力から中心力場のポテンシャルが求められる. その逆.
2. 2 個以上の物体があるときの運動方程式が立てられる.
3. 重心, 全運動量の定義が言える.

http://hig3.net

Quiz 略解

Quiz1

1. $\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}k|\boldsymbol{r}|^2 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2) = kx$ などより $\boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{r}) = -k\boldsymbol{r}$.
2. $\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = \frac{\partial}{\partial x}(k_1x+k_2y+k_3z) = k_1$ などより $\boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{k}$.

Quiz2

1. $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = (1-(-1), 0-0, 0-0) = (2,0,0) \neq \boldsymbol{0}$ よって保存的でない.
2. $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ より保存的. よってポテンシャル $U(\boldsymbol{r})$ が存在する. これは一様な力の場 (重力場 $(0,0,-mg)$ みたいなもの) で, Quiz1-2 から逆に考えると, $U(\boldsymbol{r}) = -(ax+by+cz)$ がポテンシャルになっていることがわかる. あるいは $U(\boldsymbol{r}_1) = -\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ で求めてもいい. 積分路 C は原点から $\boldsymbol{r}_1$ に至る曲線.

復習:3 次元のポテンシャル

3 次元の保存力場とポテンシャル

力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が, あるスカラー関数 $U(\boldsymbol{r})$ で　ベクトル解析

$$\boxed{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{r}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)}$$

と書かれるとき, $\boxed{\text{保存力場}}$ であるという. $U(\boldsymbol{r})$ をポテンシャル (エネルギー), 位置エネルギーという.

実用的判定方法:

$\boldsymbol{F}$ が保存力場 $\Leftrightarrow$ 回転がゼロ $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = \boldsymbol{0}.$

ベクトル解析

- 中心力場 $\Rightarrow$ 保存力場　先々週
- 保存力場 $\Rightarrow$ 力学的エネルギーが保存
- 保存力場 $\Rightarrow$ 線積分でポテンシャルが求められる　先々週

中心力場のポテンシャル

中心力場のポテンシャル

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が中心力 $\Longleftrightarrow$ ポテンシャル $U(\boldsymbol{r})$ が $r = |\boldsymbol{r}|$ だけの関数 $U(r)$

$(\Leftarrow)$ ポテンシャルが $U(r)$ のとき

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) =$

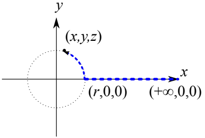
よって中心力場.
この考えは計算技術的にも有用.

Example 1 (3 次元のポテンシャルから力を求めよう)

- $U(r) = \frac{1}{r^3}\mathrm{e}^{-r}$.
- $U(r) = r^5\mathrm{e}^{-r^2}$.

(⇒) 中心力場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ に対して, ポテンシャルは

$$\boxed{U(\boldsymbol{r}_1) = -\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int^{r_1} f(r)\mathrm{d}r}.$$ ($|\boldsymbol{r}_1|$ だけの関数)



Example 2 (中心力からポテンシャルを求めよう)

- $\boldsymbol{F}(r) = -\mathrm{e}^{-r}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$.
- $\boldsymbol{F}(r) = r\boldsymbol{r}$.

実質的に中心力場って 1 次元の力の場みたいな感じ.

3 次元調和振動子

1 次元	3 次元	
$F(x) = -kx$	$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -k\boldsymbol{r}$	中心力の典型.
$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$	$U(r) = \frac{1}{2}k\lvert\boldsymbol{r}\rvert^2$	

解. x, y, z それぞれ解けばいい. $\omega = \sqrt{k/m}$.

$$
\begin{aligned}
x =& A_1 \cos(\omega t + \theta_1) \\
y =& A_2 \cos(\omega t + \theta_2) \\
z =& A_3 \cos(\omega t + \theta_3)
\end{aligned}
$$

軌跡はリサジュー (Lissajous) 図形

復習:運動量

高木 I §2.4

物体の質量 m, 位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ のとき,

$$\boldsymbol{p}(t) = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t).$$

運動方程式 (ニュートンの運動の第 2 法則)

物体が力 $\boldsymbol{F}$ を受けて運動するとき, 物体の運動量は次を満たす.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{F}(t).$$

2 体の運動方程式

高木 II p.5

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_1$$

$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_2$$

- m_i 物体 i の質量
- $\boldsymbol{r}_i$ 物体 i の位置ベクトル
- $\boldsymbol{F}_i$ 物体 i が (物体 j 以外から) 受ける力 (2 体系の　　　　)
- $\boldsymbol{F}_{ij}$ 物体 i が物体 j から) 受ける力 (2 体系の　　　　)

2 体の運動方程式を書こう!

Example 3 (運動方程式を書こう!)

(1 次元) 床の x 軸上で, ばね定数 k, 自然長 ℓ のばねでつながれた, 質量 $m_1 = m_2 = m$ の 2 つの物体.

(1 次元) 鉛直方向の z 軸上で, ばね定数 k, 自然長 ℓ のばねでつながれた, 質量 m_1, m_2 の 2 つの物体. 負の向きに大きさ mg の重力

(3 次元) z 軸の負の向きに大きさ mg の重力. ばね定数 k, 自然長 ℓ のばねでつながれた, 質量 m_1, m_2 の 2 つの物体.

(3 次元) 広い宇宙空間で, 互いの重力でひきあう質量 m_1, m_2 の 2 つの物体.

解になってることをチェックしよう!

$$x_1(t) = C_1 t + C_2 \qquad + C_3 \cos(\sqrt{\frac{2k}{m}} t + \theta)$$

$$x_2(t) = C_1 t + C_2 + \ell - C_3 \cos(\sqrt{\frac{2k}{m}} t + \theta)$$

積分定数は C_1, C_2, C_3, θ. 位置, 速度 $\times 2$ 物体=4 個.

Example 4 (グラフに描こう!)

横軸 t, 縦軸 x_1, x_2 で. $C_1 = 2, C_2 = 0, \ell = 3, C_3 = 1, \theta = 0, k/m = 1$ で.

2(N) 体をまとめて見よう

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2}(t) = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{F}_i \quad (i = 1, \ldots, N)$$

将来は 全エネルギー，全運動量,. . .

	2 体	N 体
全質量	$M = m_1 + m_2$	$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$
	$\boldsymbol{R} = \dfrac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$	$\boldsymbol{R} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$
	$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i$

$\boldsymbol{P} = M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}(t)$ になっている. 高木 II p.4

運動方程式
$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_1 \quad (1)$$
$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_2 \quad (2)$$

外力がないときを考える $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0}$:

ニュートンの運動の第 3 法則 (作用反作用の法則)

$$\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$$

(1)+(2)
$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2}(t) + m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{0}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{p}_1(t) + \boldsymbol{p}_2(t)) = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{p}_1(t) + \boldsymbol{p}_2(t) = \text{一定}$$

2 体系の運動量保存則

外力を受けない 2 体系の全運動量 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$ は保存する.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 &= \text{一定} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2) &= \boldsymbol{A} \quad \text{一定} \\
m_1\boldsymbol{r}_1(t) + m_2\boldsymbol{r}_2(t) &= \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{B} \\
\boldsymbol{R}(t)\frac{m_1\boldsymbol{r}_1(t) + m_2\boldsymbol{r}_2(t)}{m_1 + m_2} &= \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

2 体の運動の第 1 法則

外力を受けない 2 体系の $\boxed{}$ は等速直線運動する.

Quiz 1

質量 $m = m_1 = m_2$ の 2 体の運動

$$\boldsymbol{r}_1(t) = (3t+1, -2t+2, 9t) + (1, 2, +1)\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \theta\right)$$
$$\boldsymbol{r}_2(t) = (3t+1, -2t+2, 9t) - (1, 2, +1)\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \theta\right)$$

を考える.

1. 運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k(\boldsymbol{r}_1(t) - \boldsymbol{r}_2(t))$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k(\boldsymbol{r}_2(t) - \boldsymbol{r}_1(t))$$

   を満たすことを示そう.

2. 重心座標, 全質量, 全運動量を求めよう.

教科書のお奨め問題 高木 II 演習問題 [1](§8)