

# 重心運動と相対運動

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

力学 L08(2010-06-16 Wed)

更新:Time-stamp: "2010-06-16 Wed 22:00 JST hig"

## 今日の目標

- ①  $N$  体, 特に 2 体の重心運動の方程式が書ける+解けるようになる。
- ② 換算質量を使った相対運動の運動方程式が書ける+解けるようになる。



<http://hig3.net>

## Quiz 略解

- ① 左辺  $= m \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2}(t) = -2k(1, 2, 1) \cos(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \theta)$ . 右辺  
 $= -k(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)) = -2k(1, 2, 1) \cos(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \theta)$ . よって成立する.  $\mathbf{r}_2(t)$   
 についても同様.

この運動方程式は, (重力のない) 空間を運動する, ばね定数  $k$ , 自然長  $\ell = 0$  のばねでつながれた質量  $m$  の 2 物体のもの.

大注意 示すときは左辺, 右辺を別々に計算して比較する. 答案ではいちいち直していないが, 示すべき等式の両辺に代入して何となく変形したものは失格. だって, いつでも両辺に  $(a - a)$  かければ, 最後は正しい等式  $0 = 0$  になるよ.

- ② 全質量  $M = 2m$ . 重心座標  $\mathbf{R} = \frac{m\mathbf{r}_1(t) + m\mathbf{r}_2(t)}{2m} = (3t + 1, -2t + 2, 9t)$ . 全運動量  $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = (3, -2, 9)$ .  $M \frac{d\mathbf{R}}{dt}(t)$  として求めたほうが楽.

## 2(N) 体の運動方程式の復習

高木 II p.5

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2}(t) = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_1 \quad (1)$$

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2}(t) = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_2 \quad (2)$$

- $m_i$  物体  $i$  の質量
- $\mathbf{r}_i$  物体  $i$  の位置ベクトル
- $\mathbf{F}_i$  物体  $i$  が (物体  $j$  以外から) 受ける力 (2 体系の **外力**)
- $\mathbf{F}_{ij}$  物体  $i$  が物体  $j$  から) 受ける力 (2 体系の **内力**)

$N$  体 ( $i = 1, \dots, N$ ) なら **高木 II p.23**

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2}(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i \quad (i = 1, \dots, N)$$

## 2 体の運動方程式の例

重力+ばね 2 体系

重力のはたらく 3 次元空間で運動する, ばねでつながれた 2 物体.

2 物体をつなぐばね定数  $k$ , 自然長  $\ell = 0$  のばねの力.

$z$  軸の負の向きの一様重力 (大きさ  $mg$ )

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2}(t) = -k(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - m_1 g \mathbf{e}_z \quad (\text{じば 1})$$

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2}(t) = -k(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - m_2 g \mathbf{e}_z \quad (\text{じば 2})$$

## 復習: 2(N) 体をまとめて見よう

以下しばらく  $N \geq 1$

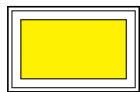
$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2}(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i \quad (i = 1, \dots, N)$$

2 体

N 体

全質量  $M = m_1 + m_2$

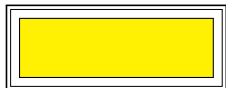
$$M = \sum_{i=1}^N m_i$$



の位置ベクトル

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$



$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \left( = M \frac{d\mathbf{R}}{dt}(t) \right)$$

将来は 全エネルギー, 全角運動量, ...

## 重心運動の運動方程式

2体の運動方程式 (1),(2) から  $R$  に対する運動方程式を導こう.

ニュートンの運動の第3法則 (

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$$

$$(1)+(2) \quad m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2}(t) + m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2}(t) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2}(t) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

## 2(N) 体の重心の運動方程式

重心の運動は全外力  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$  だけで決まる. 内力無関係.

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad (N \text{ 体なら } = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i)$$

全外力  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  の場合 2(N) 体系は  という.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}) = M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{p}_1(t) + \mathbf{p}_2(t) = M\mathbf{a} \quad (\text{一定}), \quad \text{また } \mathbf{R}(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$$

## 孤立 2(N) 体系の運動量保存則

孤立系の全運動量  $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$  は保存する.

⇨ 孤立系の重心は等速直線運動する (2(N) 体の運動の第 1 法則)

## Example 1

ばね+ばね 2 体系

$$3 \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2}(t) = -3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - 6\mathbf{r}_1 \quad (\text{ばば 1})$$

$$1 \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2}(t) = -3(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - 2\mathbf{r}_2 \quad (\text{ばば 2})$$

初期条件  $\mathbf{r}_1(0) = (4, 2, 0)$ ,  $\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}(0) = (0, -\frac{4}{3}, 0)$ ,  $\mathbf{r}_2(0) = (-8, -6, 0)$ ,  
 $\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}(0) = (0, 4, 0)$ . 重心の運動を求めよう.





## Quiz 1

重力+ばね 2体系の重心の運動方程式を書こう. 解こう (積分定数残っていい).

# 相対座標の運動方程式

高木 II §8.2 以下,  $N = 2$  体に限った話.

## 相対座標

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

変数変換  $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \leftrightarrow (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$ .

運動方程式 (1),(2) から, 相対座標  $\mathbf{r}$  に対する運動方程式を導こう.

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \left( \frac{1}{m_2} \mathbf{F}_{12} - \frac{1}{m_1} \mathbf{F}_{21} \right) + \left( \frac{1}{m_2} \mathbf{F}_2 - \frac{1}{m_1} \mathbf{F}_1 \right)$$

以下, 右辺第 2 項が  $\mathbf{0}$  の場合を考える. 例えば,

- 外力が  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$  の場合. このとき孤立系でもある.
- 外力  $\mathbf{F}_i$  が  $m_i$  に比例し, 平行な場合. 例: 一様重力  $-mge_z$ .

作用反作用の法則  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$  より,

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \left( \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \mathbf{F}_{12}$$

両辺を  $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1+m_2}{m_1m_2}$  で割って,

$$\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{F}_{12}.$$

## 相対座標の運動方程式

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}(t) = \mathbf{F}_{12}$$

相対座標  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

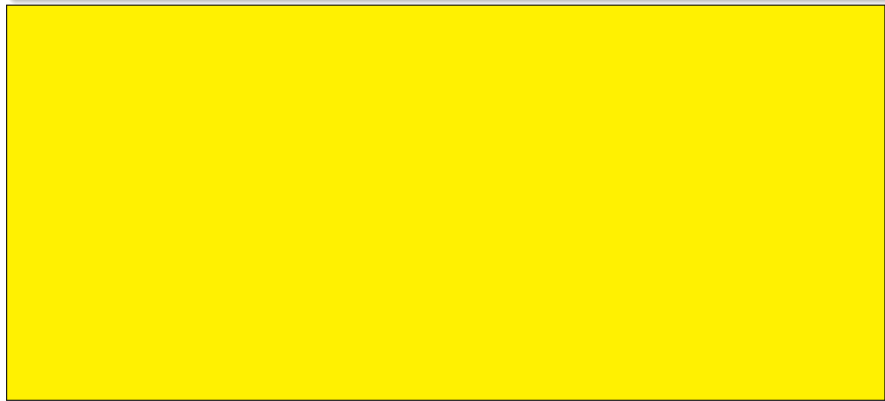
もし内力  $\mathbf{F}_{12}(= -\mathbf{F}_{21})$  が相対座標  $\mathbf{r}$  に関して保存力/中心力なら、つまり、

- $\mathbf{F}_{12} = f(|\mathbf{r}|) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$  とかけるなら、

質量  $\mu$ , 力  $\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r})$  の1体の問題とって、いままでののりで解析できる。

## Example 2

ばね+ばね 2 体系の相対運動を求めよう.



## Quiz 2

$m_1 = m_2$  のとき換算質量は? 太陽-地球 2 体系の換算質量は? 太陽の質量  $2 \times 10^{30} \text{ kg}$ , 地球の質量  $6 \times 10^{24} \text{ kg}$ .

## 本当の太陽-地球の運動

1=太陽,2=地球 (or 木星). 外力無, 内力は万有引力.  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, r = |\mathbf{r}|$ .

$$m_1 \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2}(t) = - \frac{Gm_1 m_2}{r^2} \frac{-\mathbf{r}}{r}$$

$$m_2 \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2}(t) = - \frac{Gm_1 m_2}{r^2} \frac{+\mathbf{r}}{r}$$

相対運動の運動方程式

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}(t) = - \frac{Gm_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$\mathbf{r}(t)$  は楕円を描く. 太陽, 地球

は



## 相対運動バージョンのケプラーの第3法則

等速円運動のとき、半径  $a$ 、角速度  $\omega$  として、運動方程式の両辺絶対値:

$$\mu a \omega^2 = \frac{Gm_1 m_2}{a^2}$$

$$\text{周期 } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu a^3}{Gm_1 m_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}}$$

ケプラーの第3法則は近似だった!  $m_1$  太陽,  $m_2$  惑星,  $m_1 \gg m_2$  のとき,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{Gm_1}}$$

と近似していた. 本当は地球と木星では '比例定数' が異なる!

### Quiz 3

$m_1$  地球,  $m_2$  月. 月の質量は地球の  $10^{-2}$  倍. 公転周期は 28 日.  
もし月と同じ距離に, 地球と同じ質量の衛星 (っていうかイスカンダルとガミラスのような 2 重惑星) があったら, その公転周期は何日?

教科書のお奨め問題 [高木 II 例題 \[8.2\],\[8.3\]\(§8\)](#) [高木 II 演習問題 \[3\]\[4\]\(p.18\)](#)