重心運動と相対運動

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

力学 L08(2010-06-16 Wed)
更新:Time-stamp: ”2010-06-16 Wed 22:00 JST hig”

今日の目標

1. N 体, 特に 2 体の重心運動の方程式が書ける+解けるようになろう.
2. 換算質量を使った相対運動の運動方程式が書ける+解けるようになろう.

http://hig3.net

Quiz 略解

1. 左辺$=m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2}(t)=-2k(1,2,1)\cos(\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\theta)$. 右辺$=-k(\boldsymbol{r}_1(t)-\boldsymbol{r}_2(t))=-2k(1,2,1)\cos(\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\theta)$. よって成立する. $\boldsymbol{r}_2(t)$ についても同様.
   この運動方程式は, (重力のない) 空間を運動する, ばね定数 k, 自然長 $\ell=0$ のばねでつながれた質量 m の 2 物体のもの.

大注意　示すときは左辺, 右辺を別々に計算して比較する. 答案ではいちいち直していないが, 示すべき等式の両辺に代入して何となく変形したものは失格. だって, いつでも両辺に $(a-a)$ かければ, 最後は正しい等式 $0=0$ になるよ.

2. 全質量 $M=2m$. 重心座標 $\boldsymbol{R}=\frac{m\boldsymbol{r}_1(t)+m\boldsymbol{r}_2(t)}{2m}=(3t+1,-2t+2,9t)$. 全運動量 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=(3,-2,9)$. $M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}(t)$ として求めたほうが楽.

2(N) 体の運動方程式の復習

高木 II p.5

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_1 \tag{1}$$

$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_2 \tag{2}$$

- m_i 物体 i の質量
- $\boldsymbol{r}_i$ 物体 i の位置ベクトル
- $\boldsymbol{F}_i$ 物体 i が (物体 j 以外から) 受ける力 (2 体系の 外力)
- $\boldsymbol{F}_{ij}$ 物体 i が物体 j から) 受ける力 (2 体系の 内力)

N 体 ($i = 1, \ldots, N$) なら 高木 II p.23

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2}(t) = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{F}_i \quad (i = 1, \ldots, N)$$

2 体の運動方程式の例

重力+ばね 2 体系

重力のはたらく 3 次元空間で運動する, ばねでつながれた 2 物体.

2 物体をつなぐばね定数 k, 自然長 $\ell = 0$ のばねの力.

z 軸の負の向きの一様重力 (大きさ mg)

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) - m_1 g \boldsymbol{e}_z \quad (じば 1)$$

$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) - m_2 g \boldsymbol{e}_z \quad (じば 2)$$

復習: 2(N) 体をまとめて見よう

以下しばらく $N \geq 1$

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2}(t) = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{F}_i \quad (i = 1, \ldots, N)$$

	2 体	N 体
全質量	$M = m_1 + m_2$	$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$
の位置ベクトル	$\boldsymbol{R} = \dfrac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$	$\boldsymbol{R} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$
	$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i \left(= M \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}(t) \right)$

将来は 全エネルギー , 全角運動量,. . .

重心運動の運動方程式

2 体の運動方程式 (1),(2) から $\boldsymbol{R}$ に対する運動方程式を導こう.

ニュートンの運動の第 3 法則 ($\boxed{}$)

$$\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$$

$$\begin{aligned}
\text{(1)+(2)} \quad m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2}(t) + m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2}(t) &= \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2) &= \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \\
(m_1 + m_2) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \frac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} &= \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \\
M \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2}(t) &= \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 .
\end{aligned}$$

2(N) 体の重心の運動方程式

重心の運動は全外力 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ だけで決まる. 内力無関係.

$$M\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \quad (N\text{ 体なら } = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i)$$

全外力 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ の場合 2(N) 体系は $\boxed{}$ という.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{P}) = M\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{p}_1(t) + \boldsymbol{p}_2(t) = M\boldsymbol{a} \quad (\text{一定}), \quad \text{また}\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}$$

孤立 2(N) 体系の運動量保存則

孤立系の全運動量 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i$ は保存する.

$\rightsquigarrow$ 孤立系の重心は等速直線運動する (2(N) 体の運動の第 1 法則)

Example 1

$\boxed{\text{ばね+ばね}}$2 体系

$$3 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2}(t) = -3(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) - 6\boldsymbol{r}_1 \qquad \text{(ばば 1)}$$

$$1 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2}(t) = -3(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) - 2\boldsymbol{r}_2 \qquad \text{(ばば 2)}$$

初期条件 $\boldsymbol{r}_1(0) = (4, 2, 0)$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}(0) = (0, -\frac{4}{3}, 0)$, $\boldsymbol{r}_2(0) = (-8, -6, 0)$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t}(0) = (0, 4, 0)$. 重心の運動を求めよう.

Quiz 1

$\boxed{\text{重力+ばね}}$ 2体系の重心の運動方程式を書こう. 解こう (積分定数残っていい).

相対座標の運動方程式

高木 II §8.2 以下, $N = 2$ 体に限った話.

相対座標

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$

変数変換 $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \leftrightarrow (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$.

運動方程式 (1),(2) から, 相対座標 $\boldsymbol{r}$ に対する運動方程式を導こう.

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \left(\frac{1}{m_2}\boldsymbol{F}_{12} - \frac{1}{m_1}\boldsymbol{F}_{21}\right) + \left(\frac{1}{m_2}\boldsymbol{F}_2 - \frac{1}{m_1}\boldsymbol{F}_1\right)$$

以下, 右辺第 2 項が $\boldsymbol{0}$ の場合を考える. 例えば,

- 外力が $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0}$ の場合. このとき孤立系でもある.
- 外力 $\boldsymbol{F}_i$ が m_i に比例し, 平行な場合. 例: 一様重力 $-mg\boldsymbol{e}_z$.

作用反作用の法則 $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$ より,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right)\boldsymbol{F}_{12}$$

両辺を $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}$ で割って,

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{F}_{12}.$$

相対座標の運動方程式

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{F}_{12}$$

相対座標 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

もし内力 $\boldsymbol{F}_{12} (= -\boldsymbol{F}_{21})$ が相対座標 $\boldsymbol{r}$ に関して保存力/中心力なら, つまり,

- $\boldsymbol{F}_{12} = f(|\boldsymbol{r}|)\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$ とかけるなら,

質量 μ, 力 $\boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{r})$ の 1 体の問題と思って, いままでののりで解析できる.

Example 2

$\boxed{\text{ばね+ばね}}$ 2 体系の相対運動を求めよう.

Quiz 2

$m_1 = m_2$ のとき換算質量は? 太陽-地球 2 体系の換算質量は? 太陽の質量 2×10^{30}kg, 地球の質量 6×10^{24} kg.

本当の太陽-地球の運動

1=太陽,2=地球 (or 木星). 外力無, 内力は万有引力. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, r = |\boldsymbol{r}|$.

$$m_1 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \frac{-\boldsymbol{r}}{r}$$

$$m_2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \frac{+\boldsymbol{r}}{r}$$

相対運動の運動方程式

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$\boldsymbol{r}(t)$ は楕円を描く. 太陽, 地球

は

相対運動バージョンのケプラーの第 3 法則

等速円運動のとき, 半径 a, 角速度 ω として, 運動方程式の両辺絶対値:

$$\mu a\omega^2 = \frac{Gm_1m_2}{a^2}$$

$$周期\ T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu a^3}{Gm_1m_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G(m_1+m_2)}}$$

ケプラーの第 3 法則は近似だった! m_1 太陽, m_2 惑星, $m_1 \gg m_2$ のとき,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G(m_1+m_2)}} \simeq 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{Gm_1}}$$

と近似していた. 本当は地球と木星では ‘比例定数’ が異なる!

Quiz 3

m_1 地球, m_2 月. 月の質量は地球の 10^{-2} 倍. 公転周期は *28* 日.
もし月と同じ距離に, 地球と同じ質量の衛星 (っていうかイスカンダルとガミラスのような *2* 重惑星) があったら, その公転周期は何日?

教科書のお奨め問題 高木 II 例題 [8.2],[8.3](§8)　高木 II 演習問題 [3][4](p.18)