2 体の衝突と N 体系の角運動量

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

力学 L10(2010-06-30 Wed)
更新:Time-stamp: "2010-06-30 Wed 18:02 JST hig"

今日の目標

1. 運動量保存則と反発係数から x 軸上の衝突を計算できるようになろう
2. N 体系の角運動量を重心運動と相対運動にわけて計算できるようになろう

http://hig3.net

Quiz1 略解

1. $\boldsymbol{R}(t) = \frac{2\boldsymbol{r}_1(t)+1\boldsymbol{r}_2(t)}{2+1} = (3t+1, -2t+2, 9t)$,
$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_2(t) - \boldsymbol{r}_1(t) = -(3,6,3)\cos(3t)$.
2. $K_1 = \frac{1}{2}m_1\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}(t)\right|^2 = (3-3\sin 3t)^2+(-2-6\sin 3t)^2+(9-3\sin 3t)^2$,
$K_2 = \frac{1}{2}m_2\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t}(t)\right|^2 =$
$\frac{1}{2}((3-6\sin 3t)^2 + (-2-12\sin 3t)^2 + (9-6\sin 3t)^2)$.
ちなみに $K_1 + K_2 = 141 + 162\sin^2 3t$.
3. $K_R = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}(t)\right|^2 = \frac{3}{2}\cdot 94 = 114$,
$K_r = \frac{1}{2}\mu\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right|^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 54\cdot 9\cos^2 3t$.
予想通り $K_R + K_r = 114 + 162\sin^2 3t$.

Quiz2 略解

1. $K = K_1 + K_2 + K_3 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (2^2 + 10^2) + 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (2^2 + 4^2 + 2^2) = 64.$
$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 = (2, 0, -10) + (0, 0, 0) + (2, -4, 2) = (4, -4, -8).$
2. $\boldsymbol{R}(t) = \frac{m_1 \boldsymbol{r}_1(t) + m_2 \boldsymbol{r}_2(t) + m_3 \boldsymbol{r}_3(t)}{m_1 + m_2 + m_3} = (t + 1, -t, -2t + 1).$
ちなみに, 重心座標の運動エネルギーは,
$K_R = \frac{1}{2}(1 + 2 + 1)(1^2 + 1^2 + 2^2) = 12.$
全運動量は $\boldsymbol{P} = (1 + 2 + 1)(1, -1, -2)$ としても求められる.
3. $\boldsymbol{r}'_1(t) = \boldsymbol{r}_1(t) - \boldsymbol{R}(t) = (t + 3, t, -8t + 3)$, $\boldsymbol{r}'_2(t) = (-t - 1, t, 2t - 1)$,
$\boldsymbol{r}'_3(t) = (t - 1, -3t, 4t - 1).$
4. $\boldsymbol{P}' = m_1 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_1}{\mathrm{d}t} + m_2 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_2}{\mathrm{d}t} + m_3 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_3}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{0}$. いつでもこうなる. だから全運動量=重心座標の運動量.
$K' = K'_1 + K'_2 + K'_3 =$
$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1^2 + 1^2 + 8^2) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1^2 + 1^2 + 2^2) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1^2 + 3^2 + 4^2) = 52.$
$K = K_1 + K_2 + K_3 = K_R + (K'_1 + K'_2 + K'_3) = 64$ と確かめられる.

衝突

'短距離' で' 短時間' だけ内力がはたらく出来事. 外力はなし, または無視.

高木 II §9.2

衝突の前後でも, もちろん運動量保存則は成立する.
運動エネルギーが保存することもある (完全弾性衝突)
しない場合 (非弾性衝突) もある. 運動エネルギーは熱エネルギーなどに転換されている.

1 次元の衝突の例

保存則だけによる解析
x 軸上を運動する質量 m_1, m_2 の物体. 外力なし.
衝突前の速度 $v_i = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}(t = \text{前})$, 衝突後の速度 $v_i' = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}(t = \text{後})$
大注意. ′ は相対座標でも微分でもなく, 衝突後, という意味
運動量保存則 (いつでも成立)

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \tag{う}$$

運動エネルギーの変化 ΔK だけ変化.
重心座標+相対座標で書いて,
$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1 + m_2} = V'$, $v = v_2 - v_1$, $v' = v_2' - v_1'$.

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\mu v^2 + \Delta K = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}\mu v'^2. \tag{え}$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}\mu(v'^2 - v^2) = \frac{1}{2}\mu(e^2 - 1)v^2.$$

$$\text{反発係数}\quad e = \frac{|v'|}{|v|} = \frac{|v_2' - v_1'|}{|v_2 - v_1|}. \tag{は}$$

反発係数 $e = 1 \Leftrightarrow$ 運動エネルギー保存 $\Delta K = 0 \Leftrightarrow$

反発係数 $e \neq 1 \Leftrightarrow$ 運動エネルギー非保存 $\Delta K \neq 0 \Leftrightarrow$

一直線上の 2 体の衝突

2 物体の x 軸上の衝突では,

- 衝突前の速度 v_1, v_2 (初期条件)
- 反発係数 e (は) or エネルギーの変化 (え)
- 運動量保存則 (う)

から衝突後の速度 v_1', v_2' が (運動方程式を解かなくても) 求められる.

2 次元以上では, 保存則だけでは, 衝突後の速度の向きが定まらない.

Quiz 1

質量 $m_1 = m_2 = m$ の 2 物体が, x 軸上を運動して衝突した. 初速は $v_1 = 1, v_2 = 2$ だった. 次の 2 つの場合に, 衝突後の 2 物体の速度を求めよう.

1. 完全弾性衝突のとき
2. 衝突後に 2 つの物体が合体してしまったとき

2(N) 体系の角運動量

	2 体	N 体
全質量	$M = m_1 + m_2$	$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$
重心座標	$\boldsymbol{R} = \dfrac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$	$\boldsymbol{R} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$
相対座標	$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$	$\boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}$ (重心系)
全運動量	$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i$
	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$
全外力のモーメント	$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2$	$\boldsymbol{N} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$

2 体の全角運動量＝重心座標＋相対座標

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{L}_2=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{p}_2=M\boldsymbol{R}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}+\mu\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{L}_G+\boldsymbol{L}'$$

(太陽が原点に静止していると考えたとき)
m_1 : 地球,m_2 : 月の 2 体系の全角運動量
＝ のまわりを公転する角運動量 ＋
の角運動量

高木 II p.15

証明

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{L}_2=&m_1\boldsymbol{r}_1\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{R}-\tfrac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r})+m_2\boldsymbol{r}_2\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{R}+\tfrac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r})\\=&(m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2)\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}+\tfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

Example 1

質量 $m_1 = m_2$ の物体が, 重心の周りを半径 a, 角速度 ω で等速円運動しながら, xy 平面上の $y = b > 0$ 上を速度 v で進む. 2 体系の, 原点のまわりの角運動量を求めよう.

N 体の全角運動量=重心座標の角運動量+重心系での角運動量

$$\boldsymbol{L}=\sum_i \boldsymbol{L}_i=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i=M\boldsymbol{R}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}+\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_i\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_i}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{L}_G+\boldsymbol{L}'$$

m_1:木星 $m_2, m_3, \ldots$:衛星群の N 体系の原点のまわりの角運動量
=木星・衛星群が太陽のまわりを公転する角運動量
+ 　　　　　　　　　　のまわりを公転する角運動量

証明 高木 II p.27 $\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_i=\boldsymbol{0}$, $\sum_i m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_i}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{0}$ を使う.

$$\sum_i m_i(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}'_i)\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}'_i)$$

$$=\sum_i m_i\boldsymbol{R}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}+\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_i\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_i}{\mathrm{d}t}+\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_i\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}+\sum_i m_i\boldsymbol{R}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_i}{\mathrm{d}t}$$

$$=\sum_i m_i\boldsymbol{R}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}+\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_i\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_i}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}$$

全角運動量の変化は外力のモーメントだけで決まる．内力無関係

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

外力 $\boldsymbol{F}_i$: m_i にはたらく外力
内力 $\boldsymbol{F}_{ij}$: m_j が m_i におよぼす内力．第 3 法則 $\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$. さらに $\boldsymbol{F}_{ij} \parallel (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$ を仮定.

$$m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij}$$

$$m_i \boldsymbol{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij}$$

$$\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{0}.$$

重心座標, 相対座標それぞれの角運動量の変化

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_G}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{R} \times \sum_i \boldsymbol{F}_i$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}'}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i$$

高木 II p.30

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_G}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}'}{\mathrm{d}t} = \sum_i (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'_i) \times \boldsymbol{F}_i$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}_G =& M\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{R} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}) \\
=& M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{R} \times M\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} \\
=& \boldsymbol{0} + \boldsymbol{R} \times \sum_i \boldsymbol{F}_i
\end{aligned}$$

Quiz 2

質点 $m_1 = 2, m_2 = m_3 = 1$ が, xy 平面内を運動している. ある時刻には,
$\boldsymbol{r}_1 = (0,0,0), \boldsymbol{r}_1 = (4,0,0), \boldsymbol{r}_2 = (0,-4,0)$,
$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t} = (0,0,0), \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t} = (0,-4,0), \boldsymbol{r}_3 = (-4,0,0)$ だった.

1. 各物体の角運動量の和として, 全角運動量 $\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{L}_i$ を求めよう.
2. 重心運動の角運動量 $\boldsymbol{L}_G$ と相対運動の角運動量 $\boldsymbol{L}'$ の和として, 全角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_G + \boldsymbol{L}'$ を求めよう.

教科書のお奨め問題 (衝突) 高木 II 演習問題 [1][3](p.52)

教科書のお奨め問題 (全角運動量) 高木 II 例題 8.5(p.16)

高木 II 演習問題 [3][4][7](p.18,19) 高木 II 例題 9.3(p.30) 高木 II 演習問題 [1][2](p.52)

2010-07-17 土 たぶん補講

2010-07-21 水 たぶん休講

みんなおぼえてると思うけど, 毎週 e ラーニングシステムで予習復習問題やってます.