剛体の力学

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

力学 L11(2010-07-07 Wed)
更新:Time-stamp: "2010-07-07 Wed 15:55 JST hig"

今日の目標

1. (連続的な) 剛体の重心を積分で求められるようになろう
2. (連続的な) 剛体の固定軸のまわりの慣性モーメントを積分で求められるようになろう

http://hig3.net

Quiz1 略解

1. $v_1' = 2, v_2' = 1.$
2. 運動量保存則
$$P = m \cdot 1 + m \cdot 2 = mv_1' + mv_2'$$
合体より,
$$v_1' = v_2' \quad \text{同じことだが反発係数}\, 0 = e = \frac{|v_2' - v_1'|}{|2-1|}.$$
連立させて解くと, $v_1' = v_2' = \frac{3}{2}$.

Quiz2 略解

1.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_1 &= 2\boldsymbol{r}_1 \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t} = 2 \times \boldsymbol{0} \times \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{L}_2 &= 1\boldsymbol{r}_2 \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t} = 1(4,0,0) \times (0,-4,0) = (0,0,-16) \\
\boldsymbol{L}_3 &= 1\boldsymbol{r}_3 \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3}{\mathrm{d}t} = 1(0,-4,0) \times (-4,0,0) = (0,0,-16) \\
\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{L}_3 = (0,0,-32)
\end{aligned}
$$

2. 重心座標は $\boldsymbol{R} = \frac{2(0,0,0)+1(4,0,0)+1(0,-4,0)}{2+1+1} = (1,-1,0)$.
$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} = \frac{2(0,0,0)+1(0,-4,0)+1(-4,0,0)}{2+1+1} = (-1,-1,0)$. $\boldsymbol{L}_G = (2+1+1)(0,0,-2) = (0,0,-8)$.
相対座標は $\boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}$ より,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}'_1 &= (-1,1,0), \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_1}{\mathrm{d}t} = (1,1,0), \quad \boldsymbol{L}'_1 = 2(0,0,-2) \\
\boldsymbol{r}'_2 &= (3,1,0) \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_2}{\mathrm{d}t} = (1,-3,0), \quad \boldsymbol{L}'_2 = (0,0,-10) \\
\boldsymbol{r}'_3 &= (-1,-3,0) \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_3}{\mathrm{d}t} = (-3,1,0), \quad \boldsymbol{L}'_3 = (0,0,-10) \\
\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{L}_G + \boldsymbol{L}'_1 + \boldsymbol{L}'_2 + \boldsymbol{L}'_3 = (0,0,-32)
\end{aligned}
$$

離散的な剛体 rigid body

高木 II p.55

多数の小さな物体の集まり (N 体系) で, 相互の距離が変化しないもの.
小さな物体 (質点) が, 質量 0 の伸縮したりしなったりしない棒で連結されたもの.

剛体は

- 1 個の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で指定できる位置にある. 移動できる. (これまでの '物体' と同じ)
-

物理学におけるその他の理想化弾性体, 流体, 粉体, 理想気体, ...

自由度のカウント

$\boxed{\text{自由度}}$ 実質的な座標変数の個数. degrees of freedom

***N* 個の物体** (位置のみ, 向きなし).

剛体と対比して　　　　(系) という (今まで物体と言っていたところ)

$(x, y, z) \times N$ 個 $= 3N$ 自由度

離散的な剛体 (棒で固定された 3 質点 A,B,C)

$(x, y, z) \times (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) = 9$ 自由度

距離 AB,BC,CA が一定の条件 $\times 3$. 9-3=6 自由度

連続的な剛体

高木 II §10.2

各質点 m_i が, 細かく分かれて, 個数 N が増えていくとする. $N \to +\infty$ で, 空間を埋め尽くした状態がイメージできる.
普通の固体の物体で, 伸縮したり, 変形したりしない, 理想的に固いものを想像すればよい.

(連続的な) 剛体の自由度

指定点の位置 (x, y, z) 3 自由度
向きを決める (例:Euler 角): 3 自由度
3+3=6 自由度.

(連続的な) 剛体中の質量の分布

質量密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ というスカラー場で表現される ベクトル解析
$\boldsymbol{r}$ 付近の小さな直方体 $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ 内の質量 Δm を $\rho(\boldsymbol{r})\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ と書いたもの. 単位 kg/m^3.

中学校で言う が位置 $\boldsymbol{r}$ に依存するようになったもの.

和:離散 と 積分:連続 の対応

$\sum_i f(x_i)\Delta x \rightsquigarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x.$
$\sum_i f(\boldsymbol{r}_i)\Delta m_i \rightsquigarrow \int_B f(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V.$

$$
\begin{array}{rcl}
N\ \text{質点} & \rightsquigarrow & \text{(連続的な) 剛体} \\
N & \rightsquigarrow & +\infty \\
\text{質量}\ m_i, \text{位置}\boldsymbol{r}_i & \rightsquigarrow & \text{質量密度}\rho(\boldsymbol{r}). \\
\text{和}\ \sum_i m_i \cdots & \rightsquigarrow & \text{体積分} \iiint_B \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,\rho(\boldsymbol{r})\cdots = \int_B \mathrm{d}V\,\rho(\boldsymbol{r})\cdots \\
\text{全質量}\ M = \sum_i m_i & \rightsquigarrow & \int_B \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V
\end{array}
$$

B: 剛体の範囲

微積 II, ベクトル解析

重心の求め方とその意味

N 体系や離散的な剛体 $\boldsymbol{r}_i$ の重心 $\boldsymbol{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$.

重心の意味

一様重力下で　　　　　　　　　　　　　　回転しない

⇔ 剛体全体に，質量に比例する一様な重力がはたらくとき，重心に対する相対運動の力のモーメントは $\mathbf{0}$.

質量密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ の連続的な剛体の重心

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_G =& \frac{\int \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V}{\int \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V} \\
=& \left(\frac{1}{M}\int x\rho(x,y,z)\mathrm{d}V, \frac{1}{M}\int y\rho(x,y,z)\mathrm{d}V, \frac{1}{M}\int z\rho(x,y,z)\mathrm{d}V \right).
\end{aligned}
$$

Example 1

質量密度が $\rho(x, y, z) = Ax$ で与えられる直方体 $(0 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 2, -3 \leq z \leq 3)$ の質量は? 重心は?

Example 2

質量密度が一定の薄い三角定規の重心?

N 体系の回転運動の方程式 (復習)

N 体系の全角運動量の変化は外力のモーメントで決まる

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{N}, \quad \boldsymbol{N} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

外力 $\boldsymbol{F}_i$: m_i にはたらく外力 高木 II p.29
内力 $\boldsymbol{F}_{ij}$: m_j が m_i におよぼす内力.
第 3 法則 $\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$. さらに $\boldsymbol{F}_{ij} \parallel (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$ を仮定.

$$\begin{aligned}
m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{F}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij} \\
m_i \boldsymbol{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} \\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} &= \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{0}.
\end{aligned}$$

離散的な剛体の角運動量と回転の運動方程式

角運動量の定義 N 体系と同じ: $\boldsymbol{L} = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$

剛体の回転の運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{N}$$

右辺は外力だけの力のモーメントだけで決まり, 内力には関係しない.
剛体が形を保つのは

があるおかげだが, 角運動量を考えるときには忘れていいってこと.
外力の力のモーメント $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow$ 角運動量 $\boldsymbol{L}$ が保存.

固定軸がある離散的な剛体の角運動量

z 軸を固定軸とする. $L_x = L_y = 0$.
静止時の N 質点の位置: 円柱座標 (a_i, ϕ_i, z_i) で
$\boldsymbol{r}_i(t) = (a_i \cos(\phi_i), a_i \sin(\phi_i), z_i)$.
全体が z 軸まわりに $\theta(t)$ だけ回転すると,
$\boldsymbol{r}_i(t) = (a_i \cos(\theta(t) + \phi_i), a_i \sin(\theta(t) + \phi_i), z_i)$.
速度 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}(t) = (-a_i \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \sin(\theta(t) + \phi_i), a_i \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \cos(\theta(t) + \phi_i), 0)$.
角運動量の z 成分

$$L_z = \sum m_i \left(\boldsymbol{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} \right)_z = \sum_i m_i \left(x_i \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} - y_i \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \right)$$

$$= \left(\sum_i m_i a_i^2 \right) \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = I \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t)$

剛体の慣性モーメント

離散的な剛体で, $I = \sum_i m_i a_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$ を, z 軸のまわりの慣性モーメントという.
連続な剛体では, $I = \int (x^2 + y^2) \rho(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}V$
一般の軸のまわりの慣性モーメント

$$I = \int (\text{固定軸と } \boldsymbol{r} \text{ との距離})^2 \rho(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}V$$

(固定軸のまわりを回転する) 剛体の角運動量

$$L_z = I \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

運動量 $p_x = m \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ に似てない? I は質量のような変化しない量.

$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \sum_i m_i r_i^2 \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$.

(固定軸のまわりの) 剛体回転の運動方程式

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = N_z$$

ニュートンの運動方程式 $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_x$ に似てない?

Example 3

内径 a, 外径 b, 厚さ h, 質量 M の一様な 50 円玉の, 穴の中心を通り垂直な軸のまわりの慣性モーメントを求めよう.

Example 4

長さ ℓ, 質量 M の細い (直径 0 の) 棒の, 棒の端を通り端に垂直な軸のまわりの慣性モーメントを求めよう.

教科書のお奨め問題 (重心)

高木 II [例題 10.2][例題 10.3](p.68,69)

高木 II 演習問題 [3][4][5](p.81) 高木 II 演習問題 [1][3](p.52)

教科書のお奨め問題 (慣性モーメント)

高木 II [例題 11.3][例題 11.4][例題 11.5] 高木 II 演習問題 [4][5][6](p.110)

2010-07-17 土 1 補講 2010-07-21 水 休講

みんなおぼえてると思うけど, 毎週 e ラーニングシステムで予習復習問題やってます.

ファイナルトライアル計画!

- 別紙の案内参照.
- 模範解答を作ろうプロジェクトはない予定.