

# 剛体の回転の運動方程式

樋口さぶろお

龍谷大学工学部数理情報学科

力学 L12(2010-07-14 Wed)

更新:Time-stamp: "2010-07-14 Wed 15:52 JST hig"

## 今日の目標

- 1 剛体の固定軸のまわりの慣性モーメントを積分で求められるようになる
- 2 剛体の固定軸のまわりの回転を力のモーメントから求められるようになる
- 3 剛体の回転のエネルギーを求められるよう



<http://hig3.net>

## Example2 略解

質量密度を  $\rho(x, y) = \rho$  (定数) とおく. こういうのを質量面密度 (単位  $\text{kg}/\text{m}^2$ ) という.

$$M = \int_B \rho dV = \rho \times \text{三角定規の面積} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rho.$$

$$x_G = \frac{1}{M} \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{x/\sqrt{3}} dy x \rho = \frac{2}{\sqrt{3} \rho} \rho = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{x/\sqrt{3}} dy y \rho = \frac{2}{\sqrt{3} \rho} \frac{\rho}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

面積分は  $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{3}} dx$  とも書ける.

## Example 1

長さ  $l$ , 質量  $M$  の細い (直径 0 の) 一様な棒の, 棒の端を通り端に垂直な軸のまわりの慣性モーメントを求めよう.

## Example 2

中心を通り面に垂直な固定軸のまわりを回転する、半径  $a$ 、慣性モーメント  $I$  の円板がある。静止していた円板の端に、半径と  $\pi/3$  をなす方向に一定の力 (大きさ  $F$ ) を時刻  $t = 0$  から加え始めた。円板の角運動量  $L(t)$ 、回転した角度  $\theta(t)$  の時間変化を求めよう。

## 実体振り子 (剛体振り子)

軽いひもとおもりからなる振り子に対して、剛体が(重心を通らない)固定軸のまわりに重力のもとで振動する振り子を

実体振り子 剛体振り子 という。高木 II p.99

### Example 3

質量  $M$ 、固定軸のまわりの慣性モーメント  $I$  の実体振り子を考える。重心と固定軸の距離を  $h$  とする。重心と固定軸を結ぶ線が鉛直方向となす角を  $\theta(t)$  とする。時刻  $t=0$  に  $\theta_0$  だけ傾けて手をはなした。  $\theta_0 \ll 1$  のとき、 $\sin \theta \sim \theta$  と近似して  $\theta(t)$  を求めよう。



## 剛体回転のエネルギー

離散的な剛体を考える。

$z$  軸を固定軸とする。

静止時の  $N$  質点の位置: 円柱座標  $(a_i, \phi_i, z_i)$  で

$$\mathbf{r}_i(t) = (a_i \cos(\phi_i), a_i \sin(\phi_i), z_i).$$

全体が  $z$  軸まわりに  $\theta(t)$  だけ回転すると,

$$\mathbf{r}_i(t) = (a_i \cos(\theta(t) + \phi_i), a_i \sin(\theta(t) + \phi_i), z_i).$$

$$\text{速度 } \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}(t) = (-a_i \frac{d\theta}{dt} \sin(\theta(t) + \phi_i), a_i \frac{d\theta}{dt} \cos(\theta(t) + \phi_i), 0).$$

## 剛体の回転エネルギー

運動エネルギー  $K$  は個々の質点の運動エネルギーの和 高木 II §11.4

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left| \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right|^2 = \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i a_i^2 \right) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} I \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

質点の運動エネルギー  $K = \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$  に似てない?

## Example 4

- ① 半径  $a$ , 厚さ  $h$ , 質量  $M$  の一様な円板が, 中心を通り円板に垂直な固定軸のまわりで, 角速度  $\omega$  で回転する. 回転エネルギーを求めよう.
- ② 半径  $a$ , 質量  $M$  の細い環が, 中心を通り環を含む平面に垂直な固定軸のまわりで, 角速度  $\omega$  で回転する, 回転エネルギーを求めよう.

## Quiz 1

長さ  $\ell$ , 質量  $M$  の一様な細い棒がある. 中央 (重心) から  $a$  だけ離れた点に, 棒に垂直に, 水平な回転軸を設けた ( $0 < a < \ell/2$ ). この実体振り子の周期を求めよう. また,  $t = 0$  に  $\theta_0$  だけ傾けて手をはなした.

- 1 傾き  $\theta(t)$  の時間変化を求めよう.
- 2 回転のエネルギーの時間変化を求めよう.

## 教科書のお奨め問題 (慣性モーメント)

高木 II [例題 11.3][例題 11.4][例題 11.5]

高木 II 演習問題 [3][4][5][6](p.110)

教科書のお

## 奨め問題 (回転の運動方程式と回転エネルギー)

高木 II 演習問題 [1][2][7][9][10](p.109)

- 毎週 e ラーニングシステムで予習復習問題やっています。
- 2010-07-17 土 1 補講. ふつうの講義 1 回分です. 資料や Quiz 略解は Web や 1-503 前レターボックスでも配布.
- これまで, および今後の Quiz 答案返却は 1-503 前掲示板で.
- 樋口は 2010-07-19 の週は不在です.
- 全学授業アンケートにご協力ください. 所属学部コード 5, 所属学科コード a.

## ファイナルトライアル計画!

科目の成績 100 点のうち 50 点. 外部記憶ペーパー使用可. 別紙の案内参照. 現時点では次のような出題を予定 (2010-07-17 に確定して Web で公開)

- $2, N$  体系の重心座標や相対座標を求める問題
- $2, N$  体系の角運動量を求める問題
- $2, N$  体系の運動エネルギーを求める問題
- 重力により, 重心のまわりを等速円運動する惑星と衛星の公転周期を求める問題
- 直線上を運動する 2 物体の衝突の問題
- 連続的な剛体の重心を求める問題
- 連続的な剛体の慣性モーメントを求める問題
- 固定軸のある連続な剛体の回転運動を求める問題
- 固定軸のある連続な剛体の回転のエネルギーを求める問題
- 回転しつつ移動する剛体の運動を求める問題