剛体の回転と移動

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

力学 L13(2010-07-17 Sat)
更新:Time-stamp: "2010-07-17 Sat 07:49 JST hig"

今日の目標

1. 撃力 (短時間に加わる強い力) が加わったときの移動と回転を求められるようになろう.
2. 運動方程式を解いて, 回転しつつ移動する剛体の運動を求められるようになろう.

http://hig3.net

Example4 略解

1. 質量 (体) 密度を ρ (定数) とする. 固定軸を z 軸とすると, 極座標 (r,θ) を用いて,

$$I = \int_B \rho\cdot(x^2+y^2)\mathrm{d}V \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a \mathrm{d}r\ r\cdot r^2 = \frac{1}{2}\pi h a^4 \rho.$$

   一方質量は $M=\rho\times$ 円柱の体積 $=\pi a^2 h\rho$. よって, $I=\frac{1}{2}Ma^2$. $K=\frac{1}{4}Ma^2\omega^2$.

2. 単位長さあたりで考えた質量 (線) 密度を ρ (定数) とする. 円周に沿って測った弧長を s とすると, $I=\int_0^{2\pi a} a^2\rho\,\mathrm{d}s = 2\pi a^3\rho$. $M=\int_0^{2\pi a}\rho\,\mathrm{d}s = 2\pi a\rho$. よって, $I=Ma^2$. $K=\frac{1}{2}Ma^2\omega^2$.

注 これって線積分ののりだよね. ベクトル解析

注 つまり, 環を作ってる物質を, 固定軸からの距離 a の 1 箇所に集めて質点にしちゃっても慣性モーメントは同じってこと.

Example4-2 の別解

(r, θ, z) で積分すると思うと,

$$I = \int \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int \mathrm{d}r \; a \cdot a^2 \rho$$

かな (この式では ρ は質量 (体) 密度) と思うけど, r, z 方向には広がりがないから, そっち方向の積分は不要で,

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \; a \cdot a^2 = 2\pi a^3 \rho.$$

(この式では ρ は質量 (線) 密度). 同様に, 質量は
$M = \int \mathrm{d}\theta \; a\rho = \rho \times$ 環の長さ $= 2\pi a\rho$. よって $I = Ma^2$

撃力

短時間 τ のうちに加わる, (一定な) 大きな力 $\boldsymbol{F}$ を考える. 高木 II §9.2

このような力による $\boxed{\text{力積}}$ $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t \simeq \boldsymbol{F}\tau$ のことを $\boxed{\text{撃力}}$ という.

力積の値がわかると, 運動量 $\boldsymbol{p}$ の変化がわかる.

$$\text{運動方程式} \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{p}(\text{直後}) - \boldsymbol{p}(\text{直前}) = \boldsymbol{p}(t_0+\tau) - \boldsymbol{p}(t_0) \simeq \boldsymbol{F}\tau$$

運動量の変化分=力積 (=撃力)

撃力のモーメント

撃力による $\boxed{\text{力積のモーメント}}$ $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t \simeq \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}\tau$ のことを $\boxed{\text{撃力のモーメント}}$ という.

力積のモーメントの値がわかると, 角運動量 $\boldsymbol{L}$ の変化がわかる.

高木 II p.103

$$\text{回転の運動方程式}\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{r}\times\int_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{L}(\text{直後}) - \boldsymbol{L}(\text{直後}) = \boldsymbol{L}(t_0+\tau) - \boldsymbol{L}(t_0) \simeq \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}\tau$$

ここで $\boldsymbol{r}$ は作用点. 時間 τ の間に移動しないと思っている.

角運動量の変化分=力積のモーメント (=撃力のモーメント)

Example 1

長さ ℓ, 質量 M の一様な細い棒を考える．最初静止していた棒の中央から b だけ離れた点に, 棒と垂直に撃力 $F\tau$ を加えた．棒の中心と端の運動を求めよう．

高木 II §12.2

Example 2 (座標系明示したバージョン)

$(0, -\ell/2, 0), (0, +\ell/2, 0)$ を両端とする質量 M の一様な細い棒を考える．$t < 0$ で棒は静止していたが, $t = 0$ に 棒の点 $(0, b, 0)$ に撃力 $(F\tau, 0, 0)$ を加えた．棒の重心と棒の端の点の運動を求めよう．

Quiz 1

なめらかな水平面上を, 質量 M, 慣性モーメント I の円板が運動する. 静止していた円板に, 時刻 $t = 0$ に縁上の, 中心から b だけずれた点に撃力 (大きさ $F\tau$) を与えた. $t > 0$ での物体の速さと回転の角速度を求めよう.

剛体の転がり運動

高木 II §12.2

Example 3

質量 M, 慣性モーメント I の円柱が, 傾き ϕ の斜面をすべらずに転がり下りる. 時刻 $t = 0$ に静かにスタートした場合, 時刻 t までに移動した距離と回転した角を求めよう.

同じ質量のアルミホイルの芯とすりこぎでは, どちらが速く移動する?

Example 4

時刻 t における位置エネルギー, (移動の) 運動エネルギー, 回転エネルギーを求めよう.

位置エネルギー $-Mgx_{\mathrm{G}}(t)\sin\theta = \cdots$

重心の移動の運動エネルギー $\frac{1}{2}M\left(\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{G}}}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 = \cdots.$

回転エネルギー $\frac{1}{2}I\omega^2 = \cdots.$

教科書のお奨め問題 (撃力のモーメント) 高木 II [4][5][6][7](p.144)

教科書のお奨め問題 (回転と移動) 高木 II [例題 12.1][例題 12.2](p.115)

高木 II [1][2][3](p.133)

みんなおぼえてると思うけど, 毎週 e ラーニングシステムで予習復習問題やってます.

ファイナルトライアル計画!

科目の成績 100 点のうち 50 点．外部記憶ペーパー使用可．別紙の案内参照．次のような出題を予定．2010-07-17 にちょっと変更しました．

- 2,N 体系の重心座標や相対座標を求める問題
- 2,N 体系の角運動量を求める問題
- 2,N 体系の運動エネルギーを求める問題
- 重力により，重心のまわりを等速円運動する惑星と衛星の公転周期を求める問題
- 直線上を運動する 2 物体の衝突の問題
- 連続的な剛体の重心を求める問題
- 連続的な剛体の慣性モーメントを求める問題
- 固定軸のある連続な剛体の回転運動を求める問題
- 固定軸のある連続な剛体の回転のエネルギーを求める問題
- 回転しつつ移動する剛体の運動を求める問題