物理数学☆演習 I ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] 配布: 2005 年 07 月 28 日更新: Time-stamp: "2005/08/02 Tue 21:10 hig"

ファイナルトライアル参加案内

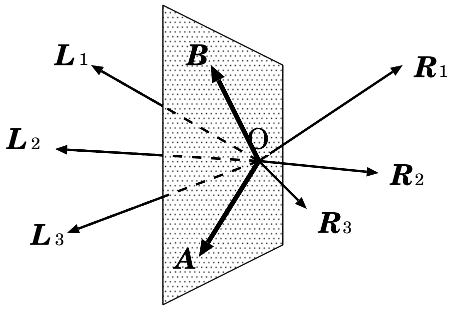
両面です. 全部で 5 問です. 以下の問題で, x, y, z 座標系は右手系 (ふだん通り) です. x, y, z 軸の正の向きの単位ベクトルの記号として, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ をつかってよいです.

1. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
2. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
3. 各自の点数は, 生協メール (アドレス `t050nnnx@ryukoku-u.jp`) で個別にお知らせします. ここに届いたメールは, Web ページ `http://www.seikyou.ne.jp/ryukoku/` で見られます.
4. 答案は返却しません.

1

ベクトル $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

1. $\boldsymbol{A}$ の向きの単位ベクトルを求めよう.
2. $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ を求めよう.
3. $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ を求めよう.
4. $\boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A})$ を求めよう.
5. ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の両方がのっている平面は 1 つだけある (図では薄く塗られている.) 下の図は, その平面を斜めから見て遠近法で描いたものである.



ベクトルがこの平面のどちら側を向いているかについて, $\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2, \boldsymbol{L}_3$ のようなベクトルを左向き, $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{R}_3$ のようなベクトルを右向きということにする.
物体の位置ベクトルが $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ +2\cos t \\ +\sin t \end{pmatrix}$ で与えられる. 時間帯 $0 \leqq t \leqq 2\pi$ のうち, 物体の位置ベクトルが右向きである時間帯を求めよう.

うらにつづく

`http://hig3.net/`(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

2

物体が xy 平面内で, 原点を中心とする半径 R 角速度 ω の等速円運動をする. 初期位相は ϕ である.

1. 時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ を, R, ω, ϕ で表そう.
2. $\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である. R と ϕ を求めよう.
3. R, ϕ が上で求めた値であるとする. さらに, $t \geqq 0$ で物体が最初に yz 平面を通過する時刻は $t = 3$ である. 角速度 ω を求めよう.

3

質量 $m = 4$ の物体が力 $\boldsymbol{F}(t) = \begin{pmatrix} 16(\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{+2t}) \\ 64(\mathrm{e}^{-4t} + \mathrm{e}^{+4t}) \\ 0 \end{pmatrix}$ を受けて運動する. $\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする.

1. 時刻 t における物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよう.
2. $(x(t))^2 - y(t)$ を求めよう.
3. xy 平面における, $t \geqq 0$ での物体の軌跡を描こう. 軌跡の上の適当な 3 点に, 速度ベクトル $\boldsymbol{v}$, 加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ を記入しよう. それぞれ $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$ とマークし, $\boldsymbol{0}$ のときは丸い点で表そう.

4

時刻 t における物体 P,Q の位置ベクトルがそれぞれ

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ t^2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

で与えられる.

1. P と Q がもっとも近づく時刻を求めよう.
2. P に対する Q の相対速度ベクトルと, ベクトル $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とのなす角が $\frac{1}{2}\pi$ より小さい時間帯を求めよう.
3. P に対して Q がもっともゆっくり動いている時刻を求めよう.

5

xy 軸を水平方向, z 軸の正の向きを鉛直上向きにとる. 物体には鉛直下向きの重力がはたらく. 重力加速度の大きさを $g = 9.8$ [m/s^2] とする.

ある遊園地の質量 $M = 2000$[kg] の乗り物に, $m = 50$[kg] の人が, 動けないようにシートベルトで縛り付けられている. 乗り物は,

$$\boldsymbol{r}_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 + 4.9\cos(2t) \end{pmatrix} \text{[m]} \tag{2}$$

に従って運動する. 以下, この乗り物に固定された座標系で考える.

1. 人の受ける慣性力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{i}}(t)$ を求めよう.
2. 人がもっとも体重が重くなったかのように感じる (乗り物に固定された座標系で見て, 人にはたらく合力が下向きで, 大きさがもっとも大きくなる) 時刻を求めよう. そのときの体重を [kg] で答えよう.
3. 人が無重力であるかのように感じる時刻を求めよう.

危険なのでまねするのはやめましょう. 　 おしまい

物理数学☆演習 I ファイナルトライアル略解

龍谷大学理工学部数理情報学科 2005 年 07 月 28 日樋口さぶろお[2]

1

1. $\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} -1 \\ +2 \\ +3 \end{pmatrix}$.
2. $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -4 \\ +1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
3. $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 7$.
4. $\boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}) = 7\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}$. ここでの $\times$ は外積でなくスカラー倍であることに注意.
5. 図より, ベクトル $\boldsymbol{C}$ が右向きであるとは, $\langle \boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle$ が左手系であることと同じ. すなわち, $\boldsymbol{r}(t) \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) < 0$ を解けばよい. $\boldsymbol{r}(t) \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = 2\sin t + 2\cos t = 2\sqrt{2}\sin(t + \frac{1}{4}\pi)$ なので, $\frac{3}{4}\pi < t < \frac{7}{4}\pi$.

2

1.
$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t+\phi) \\ R\sin(\omega t+\phi) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$
2. $R = |\boldsymbol{r}(t)| = 2$. $\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} 2\cos\phi \\ 2\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $\phi = \frac{5}{6}\pi$.
3. ω は $x(3) = 2\cos(3\omega + \frac{5}{6}\pi) = 0$ を満たす必要がある. よって $2\omega + \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi + n\pi$ だが, '最初に' yz 平面を通過することから, $3\omega + \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$. よって, $\omega = -\frac{1}{9}\pi, +\frac{2}{9}\pi$.

3

1. 運動方程式は
$$4\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} 16(\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{+2t}) \\ 64(\mathrm{e}^{-4t}+\mathrm{e}^{+4t}) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$
積分して
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} 2(-\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{+2t})+C_1 \\ 4(-\mathrm{e}^{-4t}+\mathrm{e}^{+4t})+C_2 \\ 0+C_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$
もう一度積分して
$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{+2t}+C_1t+D_1 \\ \mathrm{e}^{-4t}+\mathrm{e}^{+4t}+C_2+D_2 \\ C_3t+D_3 \end{pmatrix}. \tag{6}$$
積分定数 C_i, D_i は初期条件より, $C_1 = C_2 = C_3 = D_1 = D_2 = D_3 = 0$ と定まり
$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{+2t} \\ \mathrm{e}^{-4t}+\mathrm{e}^{+4t} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$
2. $(x(t))^2 - y(t) = -2$.

`http://hig3.net/`(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3. 上のことから, 軌跡は $y = x^2 + 2$ の一部であることがわかる.

4

1. 距離 $f(t) = |\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t) - \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}(t)|$ が最小になる時刻を求めればよい. それには $g(t) = f(t)^2 = t^4 + t^2 - 6t + 10$ が最小になる時刻をもとめればよい. $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(t) = 4t^3 + 2t - 6$ が 0 となるのは $t = 1$ のみでこれが極小. 増減表を作って調べると, $t = 1$ が最小になっている.
2. 相対速度ベクトルは $\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}(t) - \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2t \end{pmatrix}$. なす角を θ とすると, 条件は
$$0 < \cos\theta = \frac{\boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{v}(t)||\boldsymbol{w}|}.$$
つまり,
$$\boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{w} > 0 \tag{8}$$
が条件で, $t > -\frac{1}{4}$.
3. $h(t) = |\boldsymbol{v}(t)|^2 = 1 + 4t^2$ が最小になる時刻を求めればよい. $t = 0$.

5

1. $\boldsymbol{F}_{\mathrm{i}}(t) = -m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 980\cos(2t) \end{pmatrix}$[N].
2. 乗り物に固定された座標系で見て, 人にはたらく力 $\boldsymbol{F}(t)$ は, この慣性力と重力の合力で,
$$\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{F}_{\mathrm{i}}(t) - mg\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 980\cos(2t) - 490 \end{pmatrix} \text{[N]}. \tag{9}$$
これが, 負の値で絶対値が最大になるのは時刻 $t = \frac{1}{2}\pi + n\pi$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$. 体重は, $\boldsymbol{F}(t)/g$ だから, $|\boldsymbol{F}(\frac{1}{2}\pi)|/g = 150$ [kg].
3. 合力 $\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{0}$ となる時刻を求めて, $t = \frac{1}{6}\pi + n\pi, \frac{5}{6}\pi + n\pi$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

Web ページで見られる講義の録画に関するアンケート

ご協力お願いします. 該当する番号に ◯ をつけてください. 成績には関係ありません.

$\boxed{0}$ これまでに録画を何回再生しましたか. 該当するもの**ひとつ**をえらんでください.

1. 0 回. → A へ.
2. 1 回. → B へ.
3. 2-5 回. → B へ.
4. 5-10 回. → B へ.
5. 11 回以上. → B へ.

A. 0 回の人への質問

$\boxed{\text{A1}}$ 再生しなかった理由について, 該当するもの**すべて**にチェックしてください.

1. 再生方法がわからないため.
2. 授業終了時点で十分に理解できているため
3. 録画を見ても理解が深まるとは思えないため.
4. 録画を見る時間がないため.
5. その他の理由. よかったらお書きください.

[ ]

B. 1 回以上の人への質問

$\boxed{\text{B1}}$ 録画は理解に役立ちましたか. 該当するもの**ひとつ**にチェックしてください.

1. 役立ったことが多い.
2. 役立たなかったことが多い.
3. どちらともいえない.

$\boxed{\text{B2}}$ 何を期待して録画を見ましたか. 該当するもの**すべて**にチェックしてください.

1. 出席した回のよくわからなかったところを確かめるため.
2. 欠席した回の内容を知るため.
3. 欠席した回の要点だけを知るため.
4. 録画を見れば出席の必要がないため.
5. その他の理由. よかったらお書きください.

[ ]

$\boxed{\text{B3}}$ 講義の録画について, 録画方法, 提供方法などについて改善すべき点があれば書いてください.

[ ]