樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp: "2005/06/03 Fri 11:41 hig"

# 物理数学☆演習 I

- **講義の** Web page
  `http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath1/` **また**, `http://hig3.net/` **からもたどれます** (**下の** QR **コード**). **このページから匿名で質問, リクエストできます** (**携帯にも対応**).

- **このような文書を毎回配ります. 講義後は** (**たまに講義前にも**) **上の** Web page **や** 1-502 **前の引き出しに置いてあります. 欠席した場合**

など, 必要な人は各自持っていってください.

- 成績は授業中に行う プチトライアル+quiz 15 点, 春 (5 月) のプチテスト 15 点, 夏 (6 月) のプチテスト 25 点, 期末試験 (7 月) 50 点の合計で評価します. 100 点以上は 100 点とみなします. プチテストの正確な日程は追って連絡します.

- quiz は授業の最後に (教科書参照, 相談ありで) 行う 20 分程度の演習, プチトライアルは授業の最初に (教科書参照, 相談なしで) 行う 10 分程度の演習です. 両方または片方を行います.

- 香中 p.99, 微積分 p.123 はそれぞれ, 物理数学☆演習 I のテキスト 香取-中野 物理数学の基礎, 微積分および演習のテキスト 川野ほか 微分積分＋微分方程式の参照個所を示します.

- 再履修の方へ: 2004 年度以前の内容と同じではありません.

# 1. 3 次元のベクトルとその演算

## 1.1 ベクトルとスカラー

香中 p.2

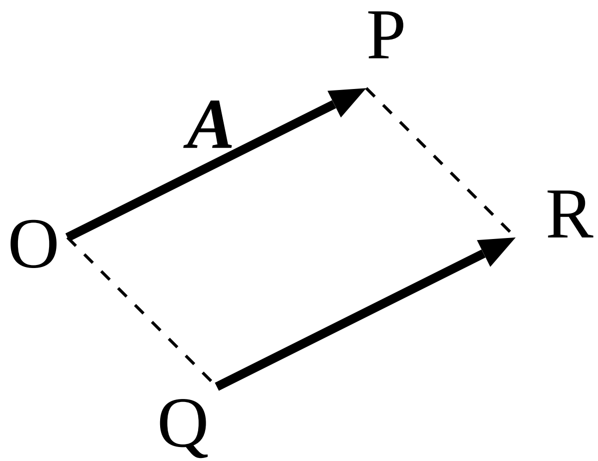
始点 を O, 終点 を P とする矢印を, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ という. $\boldsymbol{A} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ などとかく.

この矢印のように, 大きさと方向の両方のある量を ベクトル という.

大きさだけのある量を, ベクトルに対して スカラー という.

大きさと向きが両方等しければ, (始点が違っても) ベクトルは等しい. つまり, 1 して重なるようなベクトルは等しい.

$\boldsymbol{A} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{QR}}$.



**ベクトルの例**: **風** (**風向きと風力**). **スカラーの例**: **温度**.

## 記号の使い方

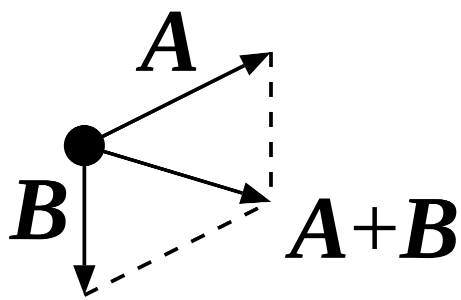
- **ベクトルは** $\boldsymbol{r}$ **や** $\boldsymbol{A}$ **のような傾いた太い字** (**または** $\vec{r}$ **のように**) **で表わす**.
- **スカラーは** $r$ **のような傾いた細い字で表わす**.
- **点の名前や単位は** O,P,Q,R, m, kg **のように立った細い字で表す**.

# 1.2 ベクトルの演算

香中 p.3

## ベクトルの和

一般に, ベクトル $C = A + B$ とは, $A$ と $B$ を 2 辺とする平行四辺形の対角線のベクトル.

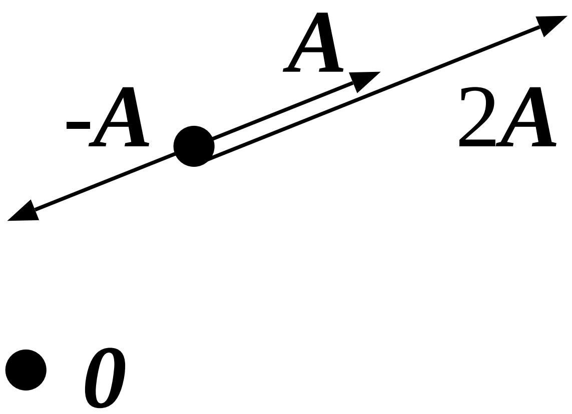



## ベクトルとスカラーの積

ベクトル $A$ と スカラー $c$ の積 $B = c \times A$ は, ベクトルであり,

- 大きさは $A$ の $|c|$ 倍.
- 向きは, 2

3　$c = 0$ なら, あとで出てくるゼロベクトルになる.




ベクトルのスカラー倍ともいう.

## ベクトルの差

ベクトル $A$ とベクトル $B$ の差 $C = A - B$ とは, ベクトルであり,

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + ((-1) \times \boldsymbol{B}) \tag{1}$$

## ゼロベクトル

$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}$ や, $0 \times \boldsymbol{A}$ は, ゼロベクトル $\mathbf{0}$ である.

ゼロベクトルは, 大きさは $0$ で, 向きはない.

$$0 \times \boldsymbol{A} = 0 \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} = \mathbf{0}. \tag{2}$$

ベクトル, スカラーについては, 普通の数であるかのように展開して計算してよい.

**例**: $2(3\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) = -2\boldsymbol{B} + 6\boldsymbol{A}$.

# 1.3 ベクトルの座標表示

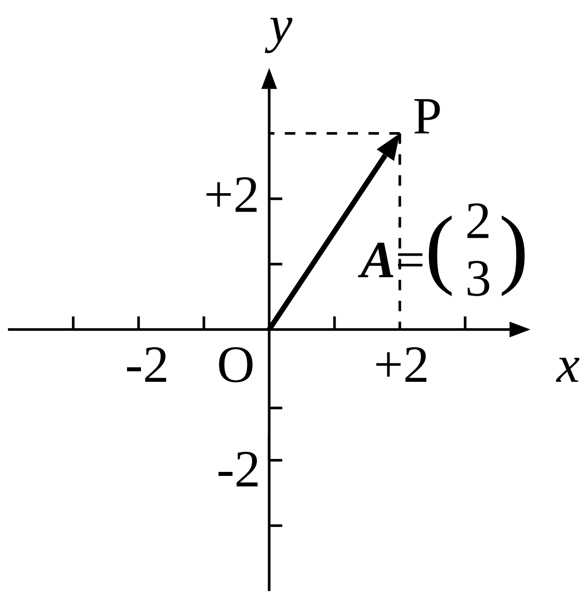
香中 p.9

ベクトルを, やっぱり, 絵じゃなく数字で表わしたい!

図のように, 原点 O で垂直に交わる $x$-軸, $y$-軸を平面に描く. $x$-軸, $y$-軸には向きがあり, $x$-座標, $y$-座標がある. $x$-軸, $y$-軸に垂線を下ろして $x$-座標, $y$-座標をよみとる.

この

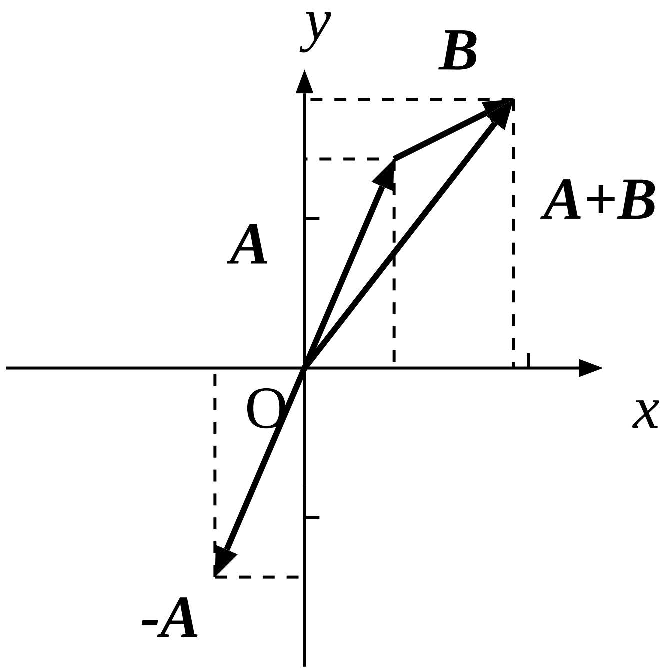
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \begin{matrix} x\text{-成分} \\ y\text{-成分} \end{matrix} \tag{3}$$




を ベクトルの座標表示 または 4 という. 2 を $x$ 成分, 3 を $y$ 成分という.

横に $\boldsymbol{A} = (2, 3)$ のように書くこともある.

# 成分で書いた ベクトルの和とスカラー倍




**ベクトル**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} \tag{4}$$

**とスカラー** $c$ **に対して**,

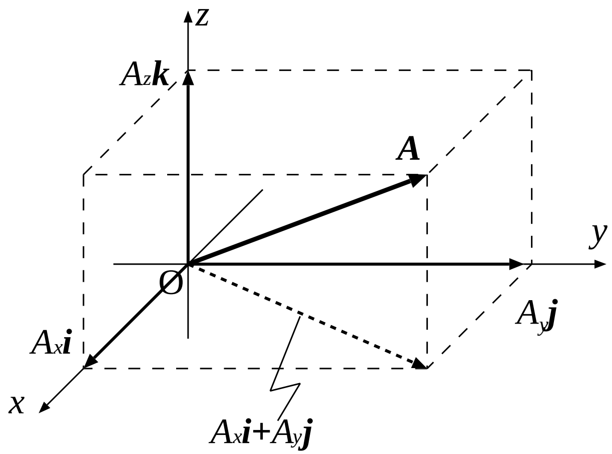
$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boxed{5} \\ \boxed{6} \end{pmatrix}, \quad c\times\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} c \times A_x \\ c \times A_y \end{pmatrix} \tag{5}$$

**である**.

## 1.4 3 次元の座標系

香中 p.13

互いに直交する $x,y,z$ の 3 つの座標軸を使う.
3 次元のベクトル $\boldsymbol{A}$ の始点を原点に置いたとき, 終点の座標を $\boldsymbol{A}$ の $x$, $y$, $z$ 成分といい, $A_x, A_y, A_z$ と書く.




$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \begin{array}{l} x\text{-成分} \\ y\text{-成分} \\ z\text{-成分} \end{array} \tag{6}$$

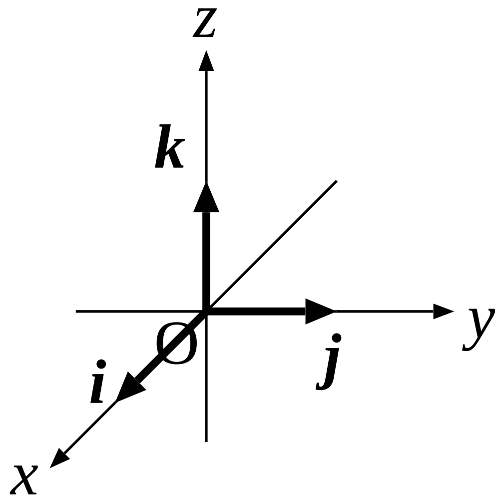
ふつうは, 右手を開いたときの親指方向を $x$, 人指し指方向を $y$, 中指方向を $z$ 軸の正の方向にとる.

左手を使うと, $z$ 軸の向きが逆になる.

# 1.5 基本ベクトル

香中 p.14

**単位ベクトル**: 大きさが 1 のベクトル.

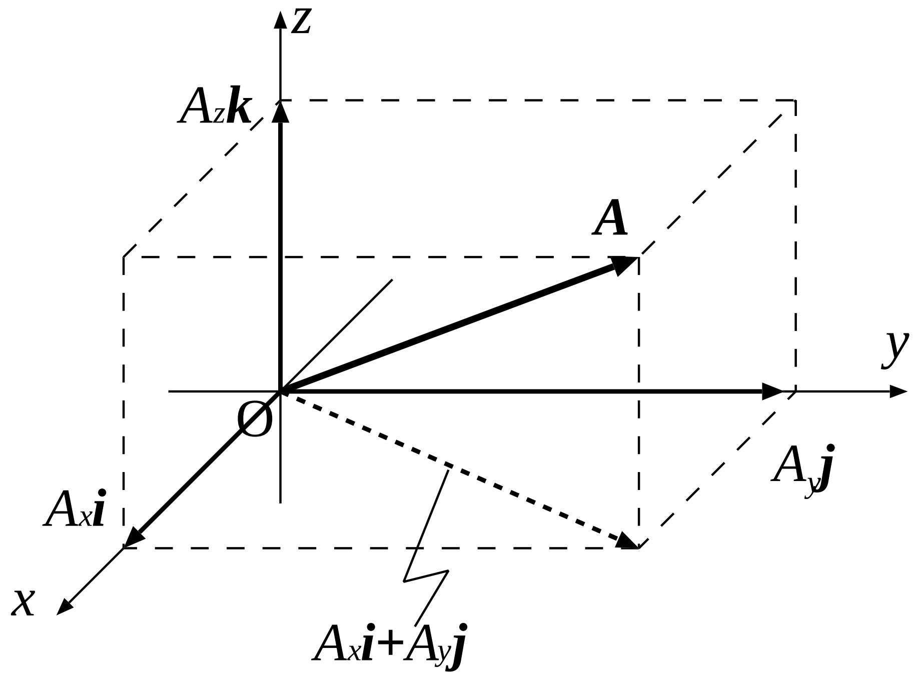



$x$,$y$,$z$ 軸の正の向きの単位ベクトルを [7] といい,

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

と書く. これらを用いると,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}. \quad (8)$$

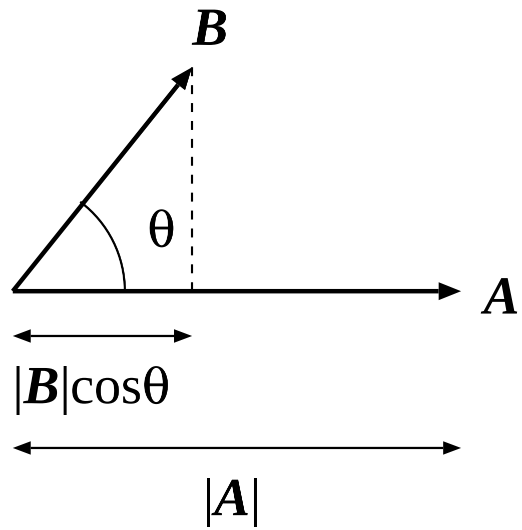



$x, y, z$ 軸を右親人中指にとるとき, ベクトルの 3 個組 $\langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \rangle$ は [8] だという. $\langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, -\boldsymbol{k} \rangle$ は右手系じゃない.

## 1.6 内積 (スカラー積)

香中 p.4

ベクトル $A$ の大きさ (長さ, 絶対値) を $|A|$ と書く (絶対値と同じ記号). $|A|$ はスカラー (実数).




2 つの 3 次元ベクトル $A, B$ に対して, 次の式で計算されるスカラー $A \cdot B$ のことを **内積** という.

$$\boxed{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}| \times |\boldsymbol{B}| \times \cos\theta.} \tag{9}$$

ベクトル $A, B, C$, スカラー $c$ に対して, 普通の数であるかのように,

$$(2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$$

のように展開したりしてよい.

基本ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は互いに直交していて大きさ 1 なので,

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1. \tag{10}$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} = 0. \tag{11}$$

## 内積 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ の成分表示　香中 p.16

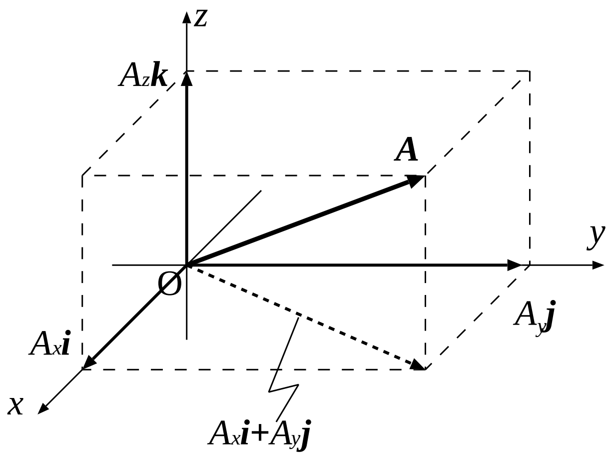
$$\begin{aligned}
\boxed{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}} =& (A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k})\cdot(B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}) \\
=& (A_xB_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + A_xB_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} + A_xB_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}) \\
+& (A_yB_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} + A_yB_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} + A_yB_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}) \\
+& (A_zB_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} + A_zB_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} + A_zB_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}) \\
=& \boxed{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}
\end{aligned} \tag{12}$$

仕事 (スカラー) は, 力 (ベクトル) と変位 (ベクトル) の内積.

# ベクトルの大きさ (内積の使い道 1)

## 三平方の定理を 2 回使うと, ベクトル $A$ の絶対値 $|A|$ は

$$|\boldsymbol{A}|^2 = \left(\sqrt{A_x^2 + A_y^2}\right)^2 + A_z^2 = \boxed{\quad 9 \quad} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \qquad (13)$$



## 内積の使い道 2: ベクトル $A$ と $B$ のなす角度

**内積の定義の式** (9) **を逆に使うと**,

$$\cos\theta = \boxed{10} \tag{14}$$

**で, ベクトル** $A$ **と** $B$ **のなす角度** $\theta$ **が計算できる.**

**例題 1**

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **とする.** $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}, |\boldsymbol{A}|,$ **および** $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ **のなす角** $\theta$ **は?**

11

# 1.7 外積 (ベクトル積)

香中 p.6

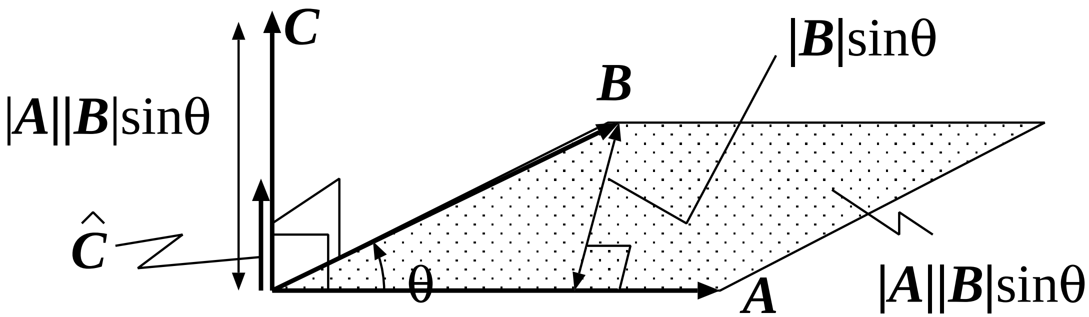
2 つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ に対して, 次の式で表わされるベクトル $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ のことを 外積 という. この記号 '×' は新しい記号. (実数のふつうの 'かける' とたまたま同じ文字).

$$\boxed{\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\,(\sin\theta)\,\hat{\boldsymbol{C}}} \tag{15}$$

ただし, $\hat{\boldsymbol{C}}$ は, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の両方に垂直な単位ベクトルで, $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \hat{\boldsymbol{C}} \rangle$ が右手系をなすようなもの.

別の言い方:

$\boldsymbol{C} \perp \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C} \perp \boldsymbol{B}$ で, $\boldsymbol{C}$ の向きは, $\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ に回る右ねじが進む向き.




大きさは $|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta = \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ のはる平行四辺形の面積.

## 計算方法

**ふつうの数であるかのように展開してよい．ただし，**

$$\text{超注意}\quad \boxed{\;12\;} \tag{16}$$

$$\text{超注意．}\ \sin\theta = 0\ \text{だから}\ \boxed{\;13\;} \tag{17}$$

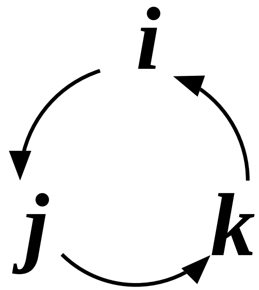
$$\text{計算例}\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}-\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \tag{18}$$

## 基本ベクトルの間の外積

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}. \tag{19}$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=+\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=+\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=+\boldsymbol{j}, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}. \tag{21}$$



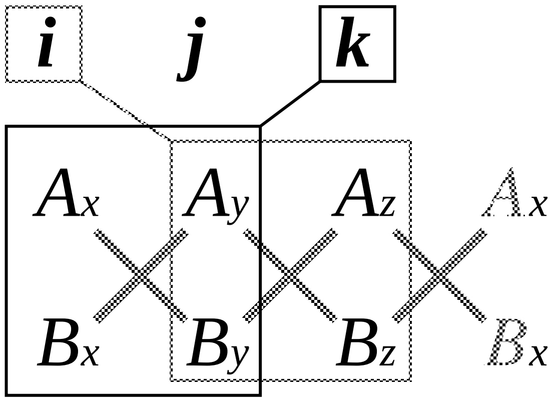

$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ **が** **循環的** (cyclic) **に入れ替わってることに注意．** $\boldsymbol{i}\to\boldsymbol{j}\to\boldsymbol{k}\to\boldsymbol{i}.$

# 外積 $A \times B$ の成分表示　香中 p.16

$$
\begin{aligned}
&\boxed{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}}\\
=&(A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}) \times (B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k})\\
=&(A_xB_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} + A_xB_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} + A_xB_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\
&+(A_yB_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} + A_yB_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} + A_yB_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\
&+(A_zB_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} + A_zB_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} + A_zB_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})\\
=&\boxed{(A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{k}.}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

$x, y, z$ **が循環的に入れ替わってることに注意**. $x \to y \to z \to x$.

**覚え方**　$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} =$




$$
= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \end{pmatrix}
$$

## 例題 2

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ +5 \end{pmatrix}$ に対して, 外積 $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$ を計算しよう.

14

フレミングの左手の法則やローレンツ力は, 外積で簡単に書ける:

$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$.

## quiz 1

ベクトル $A = \begin{pmatrix} -3 \\ +5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} +4 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix}$ とスカラー $c = -2$ とする．ベクトル $A, B$ の図を描こう．また，

$$A - 2B, c \times A, |A|, A \cdot B, A \times B$$

(の成分表示) を求めよう．

### quiz について

- ほぼ毎回，理解を確かめる quiz をします．配った紙に解いてください．感想や質問も書いてください．提出は，フォルダーを学籍番号でグループ分けしています．
- 略解はその日のうちに Web に置きます．
- 紙は，チェックした後，1-502 前の引き出しで返却します．ただし，数週間以上経過したものは処分することがあります．

- **来週は講義の最初に内積外積のプチトライアルやります**. **上の** quiz **がわかってれば大丈夫です**.

- **内積外積の答え合わせ用** i/V/EZ **アプリ**

  http://hig3.net/ > i/V/EZ **アプリ** > **ベクトルの内積外積**

| 全体 | 目次 | 前回 | 次回 | 略解 |
|---|---|---|---|---|