樋口さぶろお[a] **更新** Time-stamp: ”2005/06/03 Fri 11:41 hig”

科目のページ+質問/コメント/苦情用掲示板

http://hig3.net/

今日の目標

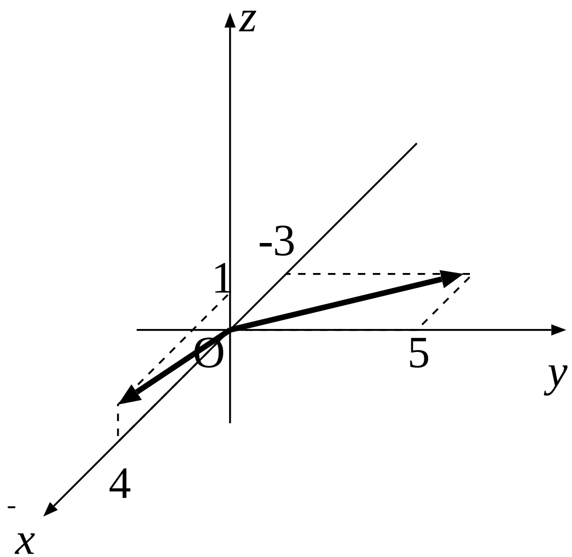
- **内積の直観的な意味 → 射影**

http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

quiz 略解 1

$$\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -11 \\ +5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c \times \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{34}, \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = -12, \quad \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -20 \end{pmatrix}$$



ベクトルには必ず太字を使おう.

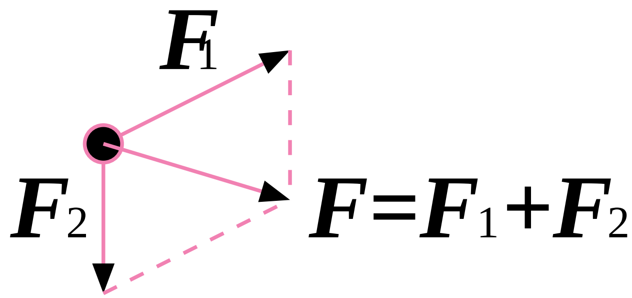
$5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 20\boldsymbol{k}$ より, 上の答え方のほうが趣味がよい. 問題文には $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は出てこないから.

2. 内積と力のバランス

2.1 力はベクトル

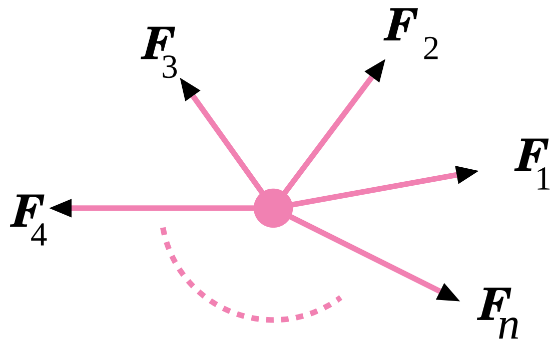
香中 p.3

力 は向きと大きさを持ち，ベクトルで表される．大きさの単位はニュートン N=kg · m/s^2.



物体に，2 つの力 $\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ が

同時にはたらいているのは，1 つの力 (15) $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ がはたらいているのと同じこと．



物体にはたらくすべての力の合力が

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots \boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{0}} \tag{23}$$

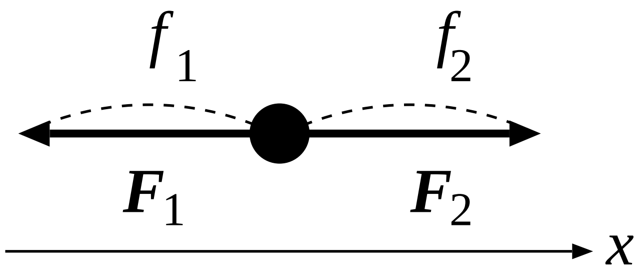
のとき，力

は つりあっている ， つりあいの状態にある という．このとき，止まっていた物体は止まったまま．

2.2 ベクトルの和と綱引き

図の場合, $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0}$ **のときつりあっている**.

力の大きさ $f_1, f_2 (> 0)$ **で書くと**,



$$f_1 = f_2 \quad \textbf{つまり} \quad f_1 - f_2 = 0 \tag{24}$$

がつりあいの条件.

f_1 と F_1 の関係

$$f_1 = |\boldsymbol{F}_1| (> 0), \quad f_2 = \boxed{16} (> 0), \tag{25}$$

$$\boldsymbol{F}_1 = \boxed{17}, \boldsymbol{F}_2 = \begin{pmatrix} +f_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ **はベクトル**, **力の大きさ** f_1, f_2 **はスカラー**.

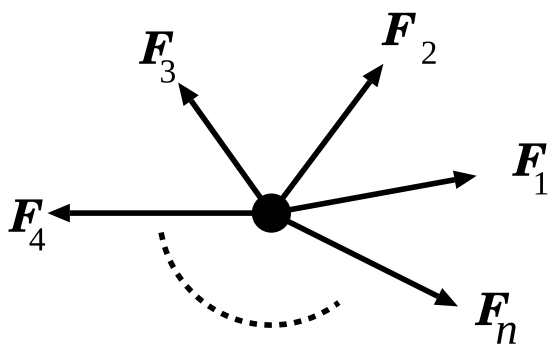
例題 3

マルチ綱引きの 4 チームが, $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4$ の力で引いたところ, つりあいの状態になって綱は動かなかった.

$$\boldsymbol{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

のとき, $\boldsymbol{F}_4$ を求めよう. いちばん力の大きいチームはどれ?

気をつけてね: 図で, ベクトルは, 綱の長さとは関係ない. 引く力の大きさ (強さ) を表している.

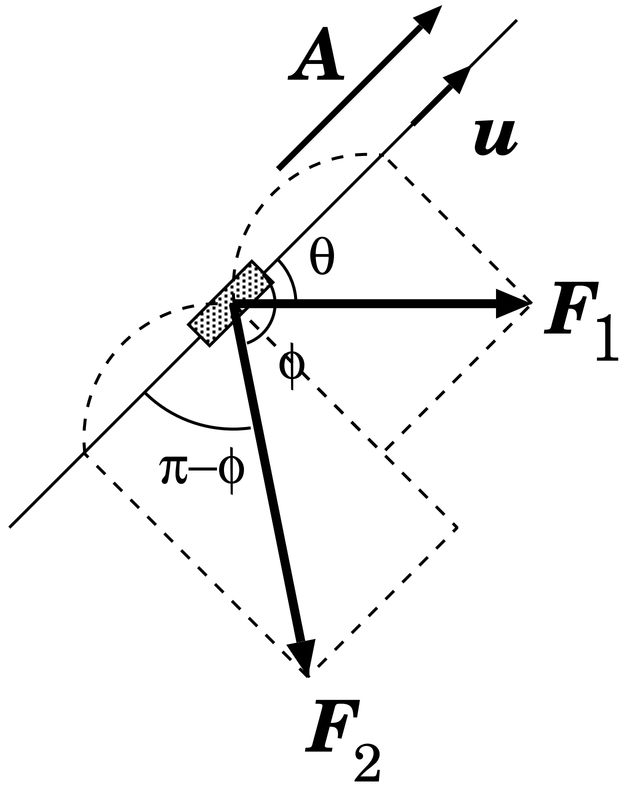


18

2.3 ベクトルの内積と列車の綱引き

線路上しか動けない列車に綱をつけて綱引き!

F_1 を線路に平行なベクトル $F_{1\|}$ と垂直なベクトル $F_{1\perp}$ に分解して考える.



$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_{1\|} + \boldsymbol{F}_{1\perp} \tag{28}$$

列車の動きに関係あるのは線路に平行なベクトル $F_{1\|}$ だけ. 列車が動かないためには,

$$\boldsymbol{F}_{1\|} + \boldsymbol{F}_{2\|} = \boldsymbol{0} \text{ つまり } \boldsymbol{F}_{1\|} = -\boldsymbol{F}_{2\|} \tag{29}$$

であればいい. 両辺の絶対値をとると,

$$|\boldsymbol{F}_1|\cos\theta = |\boldsymbol{F}_2|\cos(\pi-\phi). \tag{30}$$

この条件は内積を使うともっと簡単に書ける!

線路に平行な (単位ベクトルと限らない) ベクトルを $\boldsymbol{A}$ とする.

ベクトル $\boldsymbol{F}$ の, ベクトル $\boldsymbol{A}$ の向きの成分は, $\boxed{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u} = |\boldsymbol{F}|\cos\theta}$

ただし, $\boldsymbol{u} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A}$ と同じ向きの単位ベクトル.

線路上しか動けない列車のつりあいの条件は

$$\boxed{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots \boldsymbol{F}_n)\cdot\boldsymbol{u} = 0} \tag{31}$$

つまり, 合力 $\boldsymbol{F}$ の, (線路に平行な) ベクトル $\boldsymbol{A}$ の向きの成分が 0 になること. 成分 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}$ は, 合力が $\boldsymbol{A}$ の向きにどれだけはたらくかを表す量.

上の力 2 個の場合に, この条件は, 19 より,

$$\begin{aligned} 0 = (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2)\cdot\boldsymbol{u} =& \boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}_2\cdot\boldsymbol{u} = |\boldsymbol{F}_1||\boldsymbol{u}|\cos\theta + |\boldsymbol{F}_2||\boldsymbol{u}|\cos\phi \\ =& |\boldsymbol{F}_1|\cos\theta - |\boldsymbol{F}_2|\cos(\pi-\phi). \end{aligned} \tag{32}$$

たしかに同じ条件になっている!

例題 4

まっすぐな線路が, ベクトル $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ に平行に走っている.

1. 線路に平行な単位ベクトル u を求めよう.
2. 列車に力 $F_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が加わっている. 線路に平行な力 F_3 を加えて列車を動かないようにするには, F_3 はどのようなベクトルであればいいか考えよう.
3. 力の大きさ $|F_3|$ を求めよう.

20

2.4 力以外にも‘何とか向きの成分’は使える

例題 5

北が y 軸の正の向き, 東が x 軸の正の向き, 上が z 軸の正の向きであるような右手系をとる.

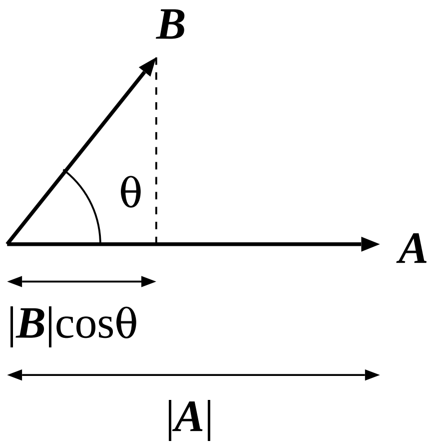
1. 南向きの単位ベクトルを成分表示で書こう.
2. 北西向き (北と西の中間 $45°$ の向き) の単位ベクトルを成分表示で書こう.
3. 北西向きに 3km 進んだ. これは, 北向きにはどれだけ進んだことになる?
4. 北向きに 2km, 次に東向きに 1km 進んだ. これは, 北西向きにはどれだけ進んだことになる?

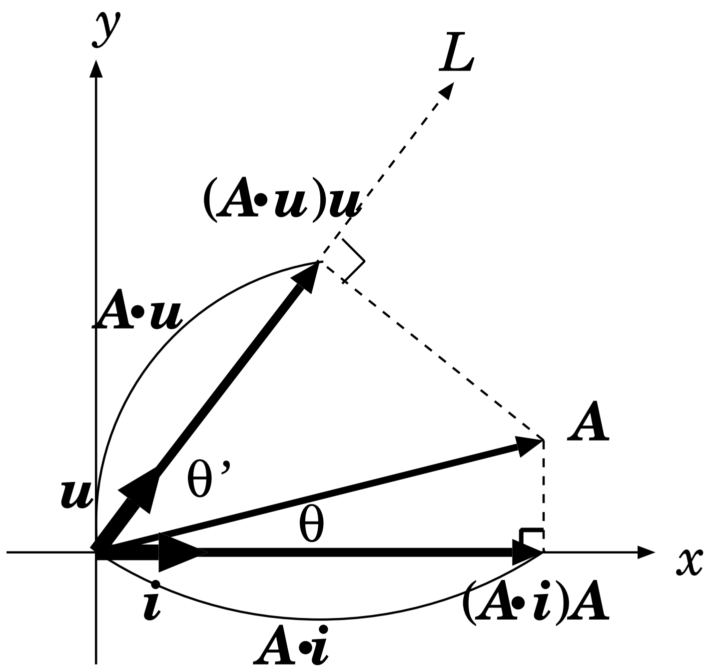
21

2.5 内積ってけっきょく何?

A と B の協力度みたいなもの

- 2 つのベクトルの向きが近いほど正で大きい. $\cos 0 = 1$
- 2 つのベクトルの向きが反対だと負. $\cos \pi = -1$
- 2 つのベクトルの向きが直交してると零. $\cos \frac{\pi}{2} = -1$. $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
- 仕事 (スカラー) は, 力 (ベクトル) と変位 (ベクトル) の内積.
- $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{B} \cdot \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$ は, B の A 向き成分.





$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u}$ は単位ベクトル.

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{i}$: ベクトル $\boldsymbol{A}$ の x 成分 ($\boldsymbol{i}$ 向きの成分)

$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{i})\boldsymbol{A}$: ベクトル $\boldsymbol{A}$ の x 軸への射影.

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{u}$: ベクトル $\boldsymbol{A}$ の (有向) 直線 L 成分 ($\boldsymbol{u}$ 向きの成分)

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{i}$: ベクトル $\boldsymbol{A}$ の直線 L への射影.

- **内積外積の答え合わせ用** i/V/EZ **アプリ**

  `http://hig3.net/` > i/V/EZ **アプリ** > **ベクトルの内積外積**

- **今日の** quiz **は回収しません．下の空欄，または自分のノートにやってね．来週のプチトライアルはここから出題します．解答は今日中に** Web **に置きます．**

quiz 2

ベクトル $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ **とする．ベクトル** A **に平行で同じ向きの単位ベクトル** u **の成分表示を求めよう．ベクトル** B **の，ベクトル** A **の向きの成分を求めよう．**