樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp: "2005/06/03 Fri 11:40 hig"

春のプチテストやります!

2004/05/19(木) です．掲示参照．

採点済プチトライアルをチェックしよう!

1-502 前の引き出しで返却してます．プチトライアルは上の方に点数が記してあります．ふつう, 3 点満点です．× か は, 考え方が間違っているという意味です．× け は, 考え方は正しいけれど計算で間違っているという意味です．

ただご飯イベントやります!

5/16(月)12:30–, 1-502 です．10 組です．10 組以外も歓迎．掲示見てね．

http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

数検を団体受検しよう!

二宮先生の基礎セミナー受講してない人も受検できます．受付は 5/13(**金**) 1-501, 13:30–15:30 , **受検は** 6/18(**土**) 9:20–12:50 **です．**1 **号館** 5 **階の掲示または** `http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/suken/` **見てね.**

チューターに質問しよう!

大学院生の方に, 勉強についての相談や授業についての質問ができます. 予約, 料金不要です．どんなことでもとりあえず行ってみよう.

曜	時間	部屋	(主な) 科目
月	12:30-13:30	1-615	数学 物理
水	12:20-13:20	1-602	情報
木	12:30-13:30	1-539	数学 情報
金	12:30-13:30	1-539	数学 物理

quiz 略解 2

$u = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\boldsymbol{B}$ の, $\boldsymbol{A}$ 向きの成分は, $\boldsymbol{A}$ と同じ向きの単位ベクトル u との内積で求められ, $\boldsymbol{B} \cdot u = \frac{-7}{\sqrt{6}}$.

今日の目標

- やじろべえがどっちにまわるかわかるようになろう.
- 外積の直観的な意味をわかろう.
- 3 次元空間の平行 4 辺形の面積, 平行 6 面体の体積が計算できるようになろう.

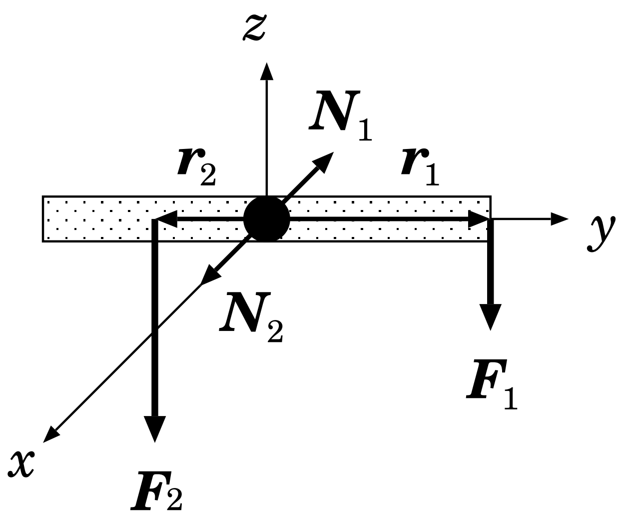
3. 回転のバランスと外積, ベクトル 3 重積

3.1 やじろべえ

香中 p.5,7

右の図のような原点で支えられたやじろべえが回転しない (つりあいの状態にある) 条件は,

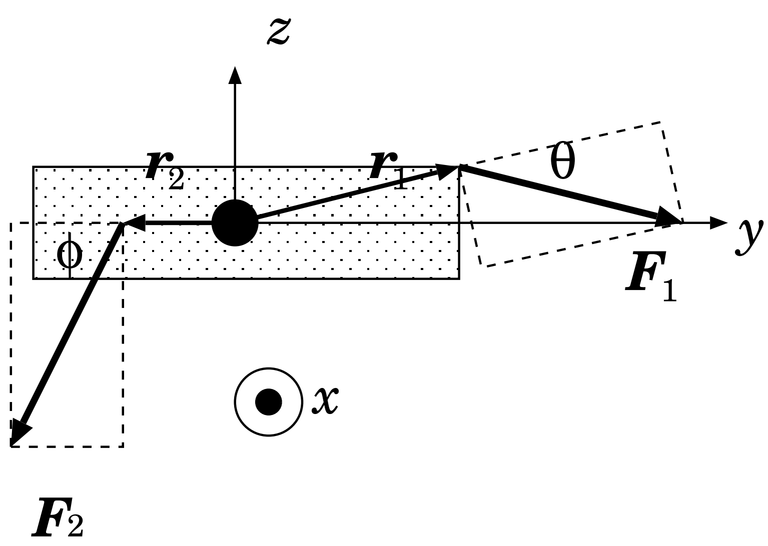
$$|\boldsymbol{F}_1| : |\boldsymbol{F}_2| = |\boldsymbol{r}_2| : |\boldsymbol{r}_1|. \qquad (33)$$



じゃあ, 斜めに引っ張る場合は?

$\boldsymbol{F}_1$ を, $\boldsymbol{r}_1$ に平行, 垂直に分解して得られるベクトルを $\boldsymbol{F}_{1\parallel}$, $\boldsymbol{F}_{1\perp}$ とする.

垂直なベクトル $\boldsymbol{F}_{1\perp}$, $\boldsymbol{F}_{2\perp}$ がやじろべえの動きに効く. つりあいの条件は



$$|\boldsymbol{F}_{1\perp}| : |\boldsymbol{F}_{2\perp}| = |\boldsymbol{r}_2| : |\boldsymbol{r}_1|. \qquad (34)$$

つまり $|\boldsymbol{F}_1|\sin\theta : |\boldsymbol{F}_2|\sin\phi = |\boldsymbol{r}_2| : |\boldsymbol{r}_1|.$ (35)

実は，これはベクトルの外積を使うと便利に書ける． 香中 p.7

n **個の力がはたらいているとき，**

$$\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1, \quad \boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{N}_n = \boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{F}_n \tag{36}$$

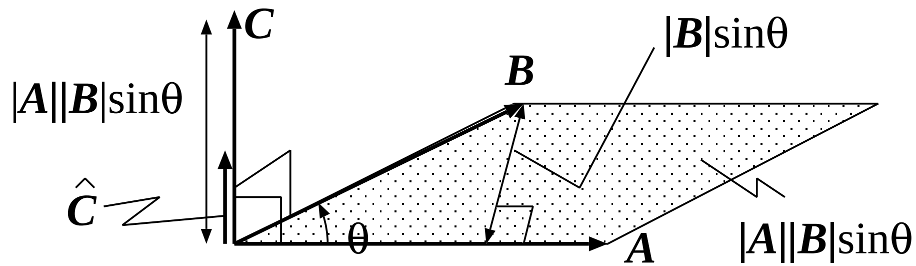
とおく．これらを，(原点のまわりの) 力のモーメント という．単位はニュートンメートル $\mathrm{N \cdot m}$.

つりあいの条件は，力のモーメントの和がゼロになること:

$$\boxed{\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 + \cdots \boldsymbol{N}_n = \boldsymbol{0}} \tag{37}$$

上の $n = 2$ **個の力の場合には，**

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0}.$$



ここで，外積の定義を使う．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} =& |\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{F}_1|(\sin\theta)(-\boldsymbol{i}) + |\boldsymbol{r}_2||\boldsymbol{F}_2|(\sin\phi)(+\boldsymbol{i}) \\
=& (-|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{F}_1|\sin\theta + |\boldsymbol{r}_2||\boldsymbol{F}_2|\sin\phi)\boldsymbol{i}
\end{aligned}
$$

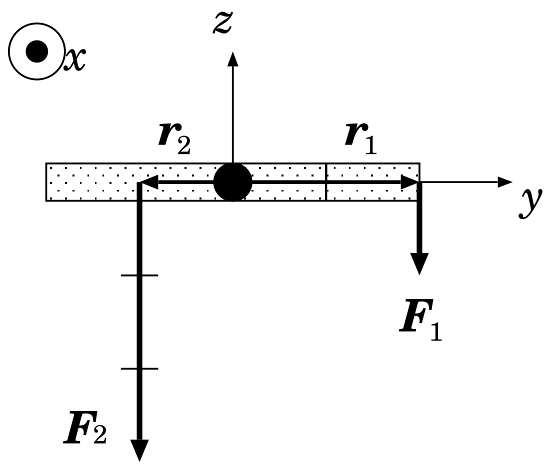
よって, 同じ式

$$
|\boldsymbol{F}_1|\sin\theta : |\boldsymbol{F}_2|\sin\phi = |\boldsymbol{r}_2| : |\boldsymbol{r}_1|. \tag{38}
$$

が得られた.

3.2 やじろべえの回転する向き

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N} =& \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \\
=& \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\neq& \boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{39}
$$

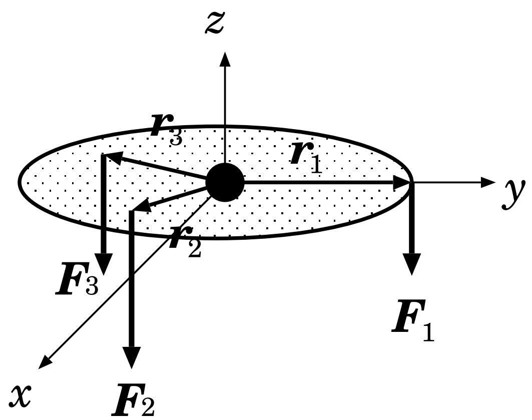


で, つりあっていないので回転する. でも, どっちに?

回転の向き

- 回転軸は N に平行.
- 回転の向き (図で, 時計回りまたは反時計回り) は, N 向きに進む 22 の回る向き.

3.3 3 次元やじろべえと外積



立体的なやじろべえのときも同じ.

$N = 0$ ならつりあってる.

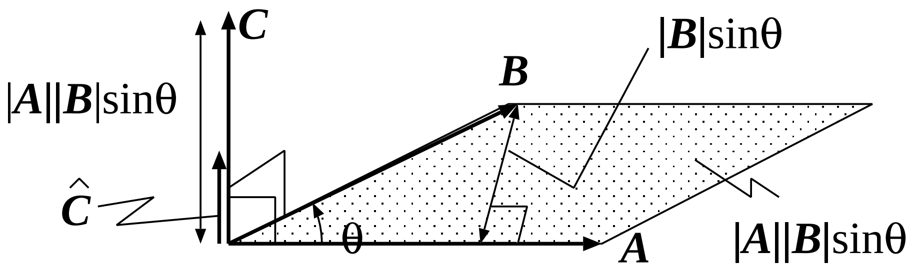
$N \neq 0$ なら,

- 回転軸は N に平行.
- 回転の向き (図で, 時計回りまたは反時計回り) は, N 向きに進む右ねじの回る向き. $\cdots$ $\boxed{\text{右ねじの向き}}$

3.4 外積ってけっきょく何?

A と B のはった網みたいなもの

- 2 本の棒 A, B を使って網を張るような感じ.
- 網の正対する向きが $C = A \times B$ の向き. (表裏あり)
- 網の面積, つまり $\boxed{\text{平行 4 辺形の面積}}$ が 23 .
  2 本の棒が違う方向を向いてるほうがたくさん魚がとれる.
- フレミングの左手の法則とか, これで簡単に書ける. $F = I \times B$.



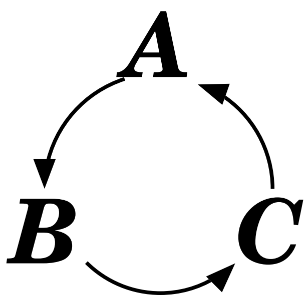
3.5 スカラー 3 重積

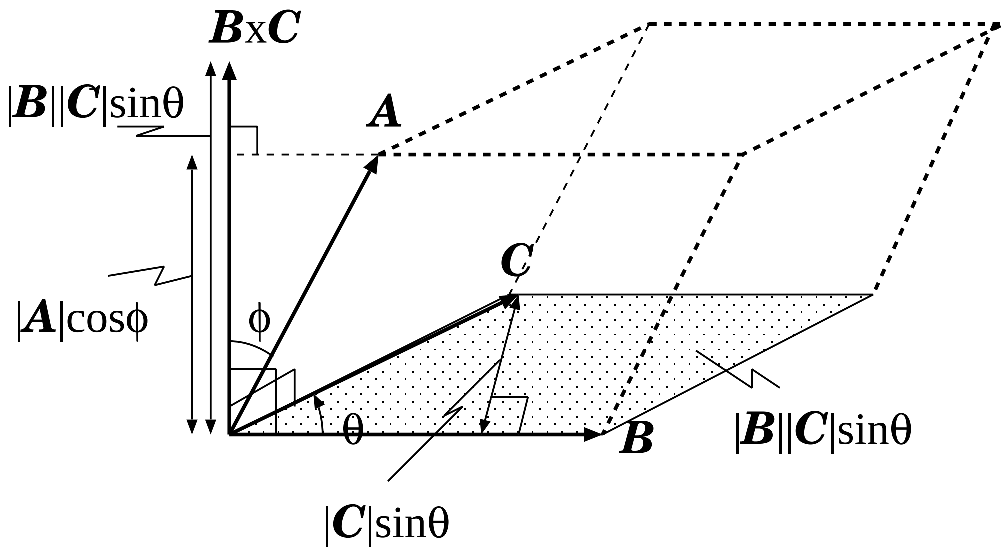
香中 p.7

$B \times C$ はベクトル．ということは，$A \cdot (B \times C)$ はスカラーになる．これをスカラー 3 重積という．

下の図から，絶対値 $|A \cdot (B \times C)|$ は，A,B,C を 3 辺とする $\boxed{\text{平行 6 面体の体積}}$．

体積だから，A, B, C を循環的に変えても等しい．





$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \boxed{24\qquad\qquad} . \tag{40}$$

例題 6

ベクトル $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

1. B, C を 2 辺とする平行 4 辺形の面積を求めよう.
2. A, B, C を 3 辺とする平行 6 面体の体積を求めよう.

25

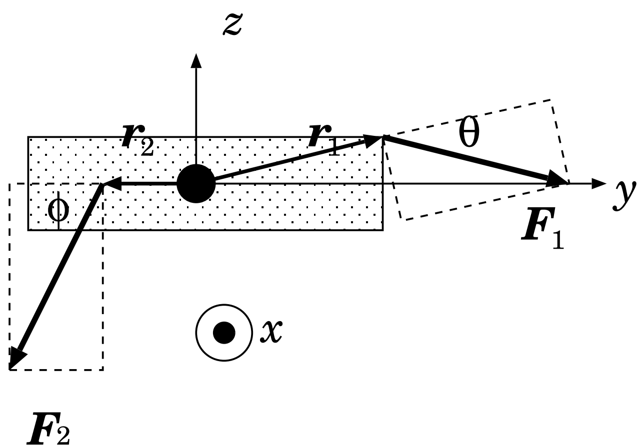
quiz **3**

ベクトル $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **とする**.

1. B, C **を** 2 **辺とする平行** 4 **辺形の面積を求めよう**.
2. A, B, C **を** 3 **辺とする平行** 6 **面体の体積を求めよう**.
3. B, C **を** 2 **辺とする** 3 **角形の面積を求めよう**. *Hint.* **平行** 4 **辺形を利用**.
4. A, B, C **を** 3 **辺とする** 3 **角錐の体積を求めよう**. *Hint.* **平行** 6 **面体を利用**.

quiz 4

原点を中心に回転するやじろべえを考える.
$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **の点に力** $\boldsymbol{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ **を**, $\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ **の点に力** $\boldsymbol{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ **を加える. 右の図** (**ベクトルは正確じゃないです**) **のように** x **軸の正の向きから見たとき, やじろべえは時計回り, 反時計回りどちらに回るか考えよう.**



力のモーメントと外積の練習用 i/V/EZ アプリ

http://hig3.net/ > i/V/EZ アプリ > 力のモーメント

講義の動画ストリーミング

実習室や自宅で, Web 上で講義の録画を見られます. 自宅での再生には Password が必要です.

UserID　　　　　　　　　　Password

科目のページ + リクエスト / 質問 / 苦情用掲示板

http://hig3.net

全体	目次	前回	次回	略解