樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp: "2005/07/12 Tue 14:33 hig"

quiz 略解 3

1. $|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}| = \left|\begin{pmatrix}-6\\4\\4\end{pmatrix}\right| = 2\sqrt{17}$
2. $|\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})| = |22| = 22$
3. 平行 4 辺形の面積の $\frac{1}{2}$ で, $\sqrt{17}$.
4. 4 角錐なら平行 6 面体の $\frac{1}{3}$. 3 角錐は底面が $\frac{1}{2}$ なので, $22\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{11}{3}$.

quiz 略解 4

$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_2 = \begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ であり, x 軸の正の向き. この向きに進む右ねじのまわる向きだから, 反時計回り.

---

http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

4. ベクトル, 直線, 平面

今日の目標

- スカラー 3 重積を利用して右手系左手系を区別できるようになろう
- ベクトルで直線と平面を表現できるようになろう

4.1 右手系と左手系

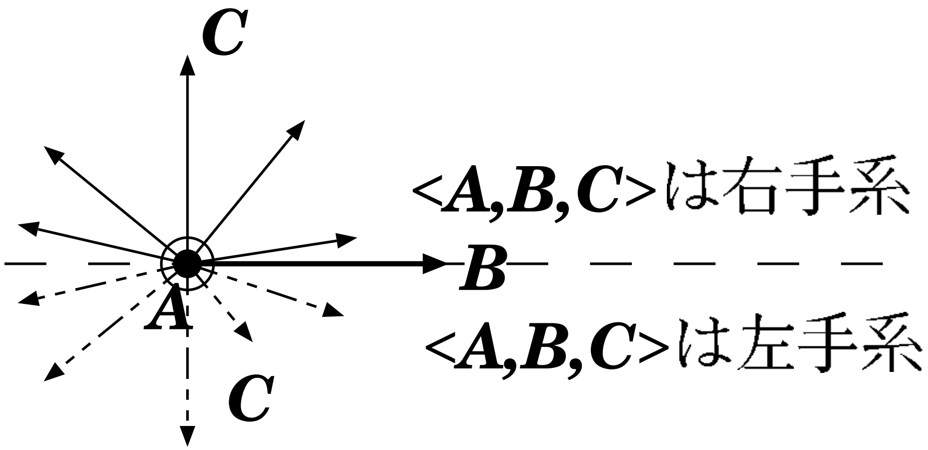
3 次元ベクトルの順序つきの 3 つ組 $\langle \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3 \rangle$ を考える (順序つき, とは $\langle \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3 \rangle$ と $\langle \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_3 \rangle$ とを異なるものとして区別すること).

- $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$ が同一平面上にあるとき, 組 $\langle \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3 \rangle$ は右手系でも左手系でもない.
- $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$ が同一平面上にこないように注意して別々に動かしていって, $\boldsymbol{A}_1$ を右手親指, $\boldsymbol{A}_2$ を右手人差指, $\boldsymbol{A}_3$ を右手中指と重ねられるなら, 組 $\langle \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3 \rangle$ は右手系.

- 重ねられないなら組 $\langle \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3 \rangle$ は左手系. (左手に重ねることができるとき, といっても同じこと).

- 右 (左) 手系を $\boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2 \to \boldsymbol{A}_3 \to \boldsymbol{A}_1$ のように 26 入れ替えたものは右 (左) 手系のまま.

- $\boldsymbol{A} \leftrightarrow \boldsymbol{B}$ のように 27 した (互換という) ものは右手系から左手系 (あるいはその逆) にかわる.

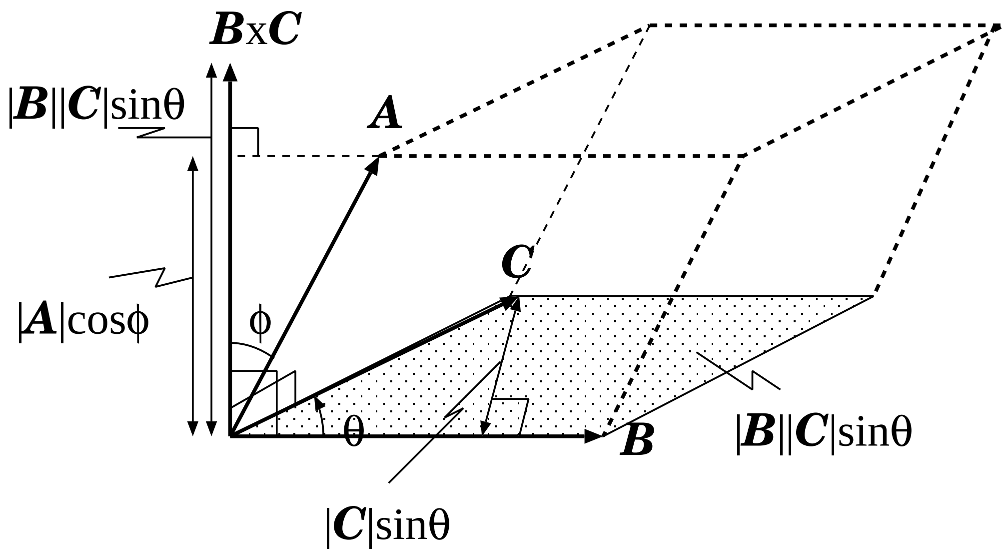


⦿ ベクトルは紙面こちら向き

⊗ ベクトルは紙面むこう向き

4.2 スカラー 3 重積による右手系と左手系

- $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})>0 \Leftrightarrow \langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\rangle$ が右手系.
- $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ が 28
- $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})<0 \Leftrightarrow \langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\rangle$ が左手系.



例題 7

次の, ベクトルの順序つきの組を考える.

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \tag{41}$$

1. **これは右手系か, 左手系かを答えよう.**
2. **これらを 3 辺とする平行 6 面体の体積を求めよう.**

29

4.3 スカラーとベクトルにまつわるいろんな演算

例題 8

A, B, C を上の例題と同じベクトルとする.

1. $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$
2. $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}$
3. $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})$

を, スカラー, ベクトル, 間違った式に分類しよう. 正しい式は値を求めよう.

30

31

4.4 ベクトルで表すいろんな図形

直線のパラメータ表示

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{C} \qquad (t \text{ はパラメータ}) \tag{42}$$

(平面内の) 直線の方程式

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = C. \qquad (C \text{ は定数}) \tag{43}$$

$\boldsymbol{n}$ は, 直線に直交する単位ベクトル.

$\boldsymbol{n} = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ としてこの方程式を成分で書くと,

$$ax + by = C. \tag{44}$$

(空間の中の) 平面のパラメータ表示

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{B}s + \boldsymbol{C} \qquad (t, s \text{ はパラメータ}) \tag{45}$$

(空間の中の) 平面の方程式

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = C \qquad (C \text{ は定数}) \tag{46}$$

$\boldsymbol{n}$ は平面と直交する単位ベクトル, つまり単位 32 .

$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|}$ で求められる.

$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ としてこの方程式を成分で書くと,

$$ax + by + cz = C. \tag{47}$$

なぜ?

33

例題 9

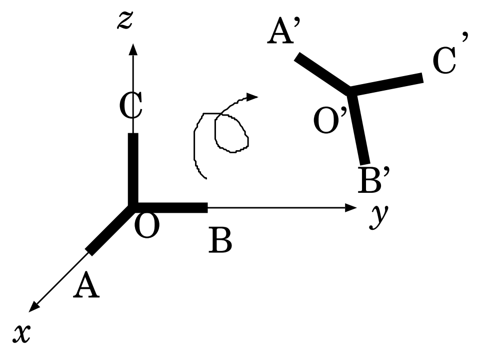
1. **単位法線ベクトルが** $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ **であり**, **点** $\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **を通る平面の方程式を求めよう**.
2. **単位法線ベクトルが** $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **であり**, **点** $\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ **を通る平面の方程式を求めよう**.

34

4.5 問題やってみよう

例題 10

最初, 3 本足の金具 OABC が原点に図のように置かれていた. この金具を曲げたり壊したりせずに, 空中に投げたところ, ある瞬間には, $\overrightarrow{\mathrm{O'A'}}$ は $\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ の向き, $\overrightarrow{\mathrm{O'C'}}$ は $\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$ の向きになっていた.



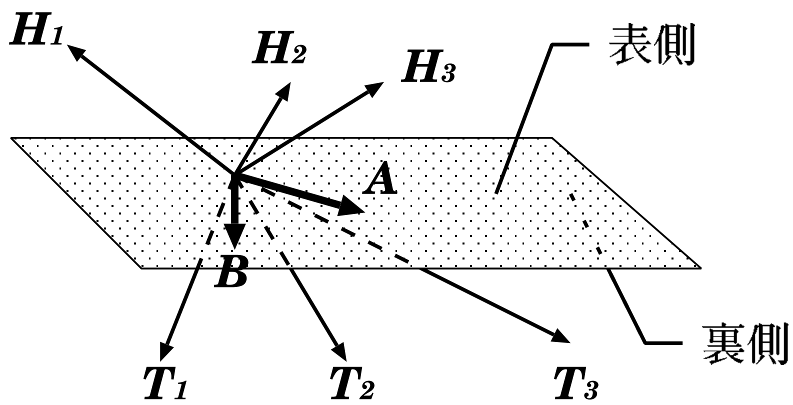
1. この瞬間の $\overrightarrow{\mathrm{O'B'}}$ の向きの単位ベクトルを求めよう.

Hint $\overrightarrow{\mathrm{O'B'}}$ は平面 $\mathrm{O'B'C'}$ の法線ベクトル.

35

quiz5

x, y, z 軸の正の向きの基本ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする．ベクトル $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} +1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする．



1. $|\boldsymbol{B}|$ を求めよう．

2. $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ を求めよう．

3. $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ を求めよう．

4. $\boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{B} - 2\boldsymbol{A})$ を求めよう．

5. ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の両方がのっている平面は 1 つだけある (図では薄く塗られている．それは xy 平面とは異なる)．図は，その平面を斜めから見たものである．

   ベクトルがこの平面の表裏どちら側を向いているかについて，$\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \boldsymbol{H}_3$ のようなベクトルを表向き，$\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3$ のようなベクト

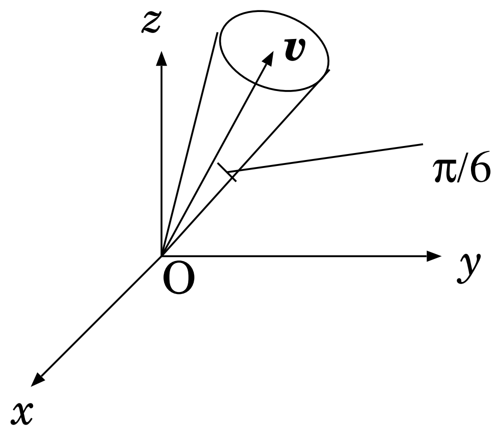
ルを裏向きということにする.

$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ が裏向きか表向きか考えよう.

quiz 6

原点を頂点とする, 無限に高い, 傾いた円錐を考えよう. ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ は円錐の中心軸に平行で, 頂点から底面に向かう向きである. (図の描き方は不正確です.) また, 円錐の軸と母線のなす角は $\pi/6$ である.

2 点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ は, $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ -3 \end{pmatrix}$ である. この 2 点はそれぞれ, 円錐の内部, 表面上, 外部のどこにあるか答えよう.



教科書のお奨め問題

香中 1.4 章末問題 1.3, 1.4, 1.5, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12

今日の quiz の解答は今日中に Web に置きます.

科目のページ + リクエスト / 質問 / 苦情用掲示板

http://hig3.net