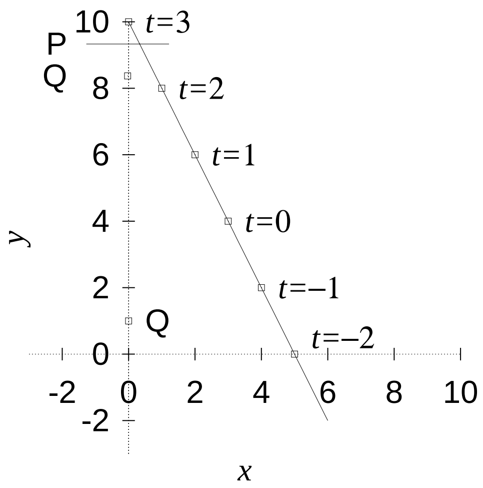
quiz 略解 7



1. $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(-2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $(x(t) =) - t + 3 = 0$ を解いて, $t = 3$.
3. $\frac{-t-2}{2} = \frac{2t+4}{3} = 0$ を解いて $t = -2$.
4. $(-t+3) + 2(2t+4) + 0 = 2$ を解いて $t = -3$.
5. $x = -t + 3, y = 2t + 4$ から t を消去して, $y = -2x + 10, z = 0$. アニメ
6. 距離の 2 乗は $f(t) = 5t^2 + 6t + 18$. $f'(t) = 0$ を満す $t = -\frac{3}{5}$ で最小になり, このときの距離は $\sqrt{f(-\frac{3}{5})} = \frac{9}{\sqrt{5}}$. あるいは平方完成を利用.

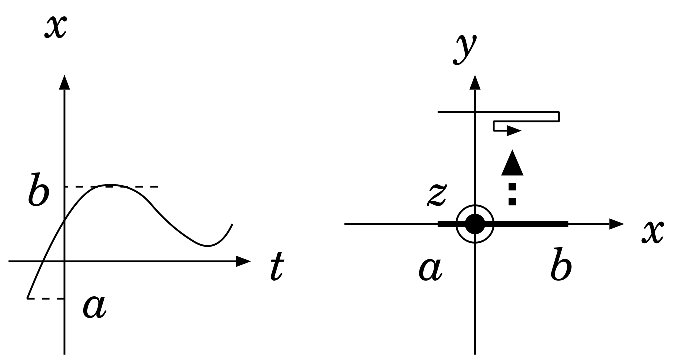
6. 速度ベクトルと加速度ベクトル

6.1 1 次元の運動

x-軸の式は $y = z = 0$ だから, x-軸の上だけを運動する物体の位置ベクトルは,

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{69}$$

となり, ただ 1 つの関数 $x(t)$ だけで表わせる. このように, 位置ベクトルの 1 成分だけで表わせる運動を 1 次元の運動という. 以下, しばらく 1 次元の運動を考える



1 次元の運動の t-x グラフと軌跡の関係

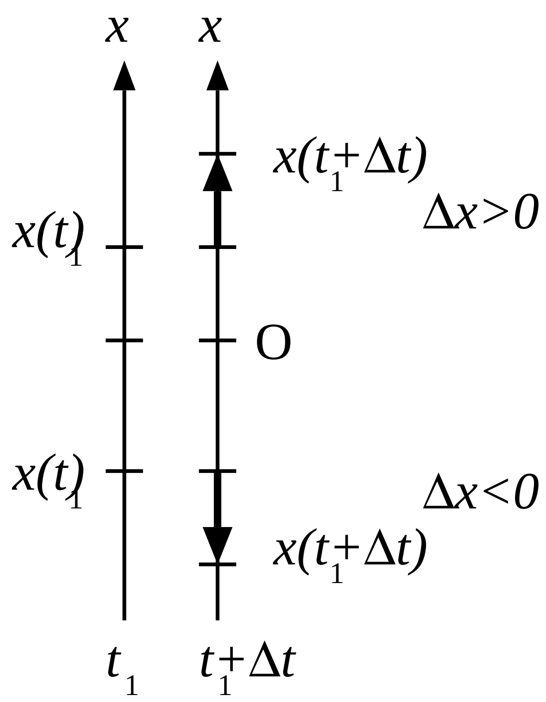
6.2 1 次元の速度

香中 p.26

時刻 t_1 **に 座標** $x(t_1)$ **にあった物体が, 時刻** $t_1 + \Delta t$ **には 座標** $x(t_1 + \Delta t)$ **まで移動していたとする. 座標の差 (変位ともいう) は**

$$\Delta x = x(t_1 + \Delta t) - x(t_1). \tag{70}$$

注: Δt **は** $\Delta \times t$ **じゃない**. Δt **(デルタティー) は短い時間を表わす変数**.



関係

$$(\text{距離}) = (\text{速さ}) \times (\text{時間}) \tag{71}$$

から,

$$(\text{時刻 } t_1 \text{ から } t_1+\Delta t \text{ までの平均速度}) = \frac{x(t_1+\Delta t)-x(t_1)}{(t_1+\Delta t)-t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{72}$$

瞬間の速度を求めるには, $\Delta t \to 0$ **の極限を考えればよい**.

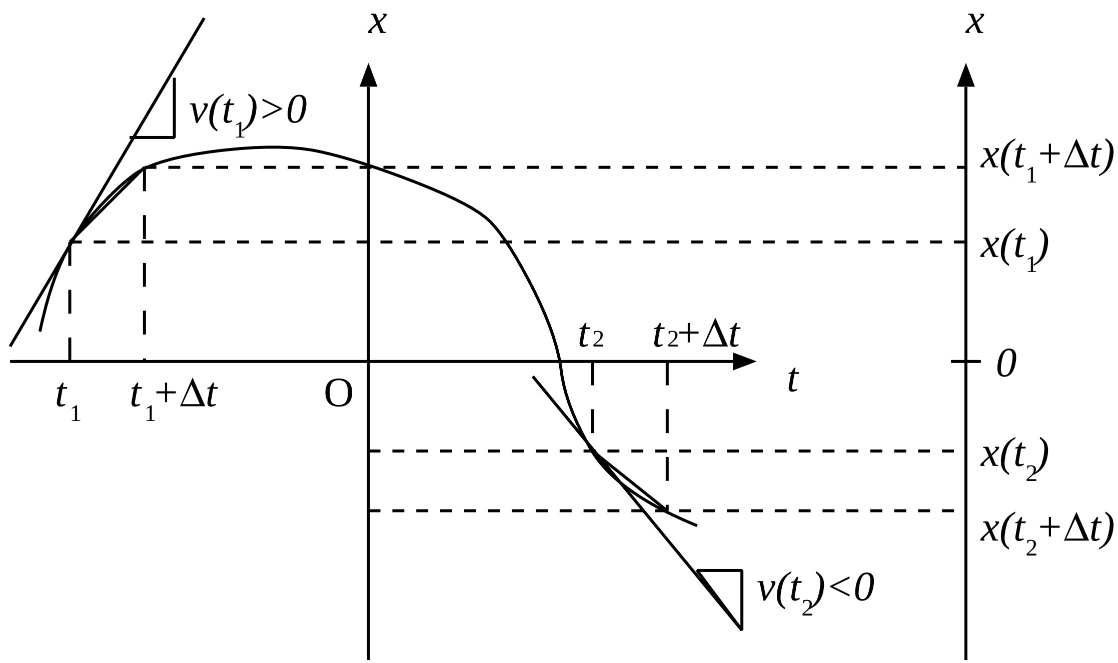
$$\text{速度 } v(t_1) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_1) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{73}$$

要するに, **座標** $x(t)$ **の** t **についての微分** (**導関数**) $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ **を時刻** t **における物体の** $\boxed{\text{速度}}$ **という**.

本や人によっては, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ **を**, $x'(t), \dot{x}(t)$ **などと書いてあることもある**.

バックしてるときは 速度は $\boxed{44\qquad}$.

例 アニメ



速度 $v(t_1)$ **は**, $t = t_1$ **における** $x(t)$ **の接線の傾き**.

v	t-x グラフ	アニメ
$v > 0$	右上がり	45
$v < 0$	右下がり	46
$v = 0$	水平	47

6.3 1 次元の加速度

香中 p.27

時刻 t_1 に 速度 $v(t_1)$ だった物体が, 時刻 $t_1 + \Delta t$ には 速度 $v(t_1 + \Delta t)$ に変化していたとする. 速度の変化分は

$$\Delta v = v(t_1 + \Delta t) - v(t_1). \tag{74}$$

関係 (変化率) $= \dfrac{(\text{変化分})}{(\text{時間})}$ から,

$$\begin{aligned}&(\text{時刻 } t_1 \text{ から } t_1 + \Delta t \text{ までの速度の平均変化率})\\ =&\frac{v(t_1 + \Delta t) - v(t_1)}{(t_1 + \Delta t) - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.\end{aligned} \tag{75}$$

瞬間の変化率を求めるには, $\Delta t \to 0$ の極限を考えればよい. 速度の瞬間の変化率のことを

$$\text{加速度 } a(t_1) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t_1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)(t_1) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t_1) \tag{76}$$

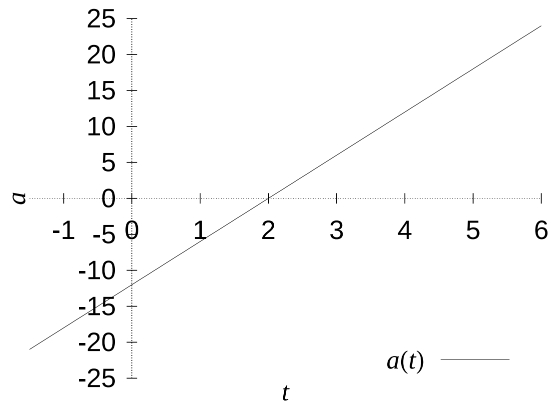
という．要するに，$\boxed{\text{加速度}}$は速度の 1 階微分，座標の 2 階微分．

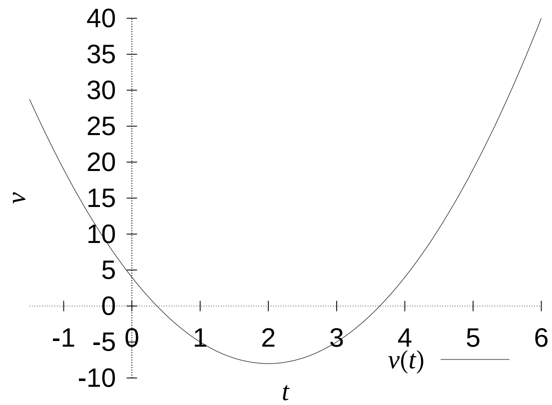
本や人によっては，$a(t) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t)$ を，$x''(t), \ddot{x}(t)$ などと書いてあることもある．

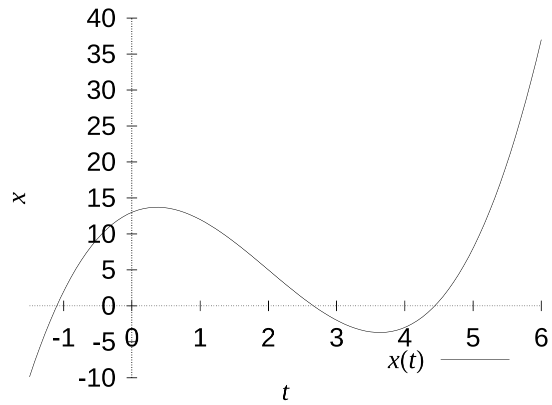
a	t 対 v	t 対 x	アニメ
$a > 0$	右上がり	48	速度増加
$a < 0$	右下がり	49	速度減少
$a = 0$	水平	50	速度一定

バックで加速してるときは　加速度は $\boxed{51}$.

例 アニメ







再び, 3 次元を運動する物体の位置ベクトル

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$ を考えよう.

6.4 速度ベクトル

香中 p.30

時刻 t_1 に 位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t_1)$ にあった物体が, 時刻 $t_1 + \Delta t$ には 位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t_1 + \Delta t)$ まで移動していたとする.

Δt 秒間の変位ベクトル

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_1 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_1) \tag{77}$$

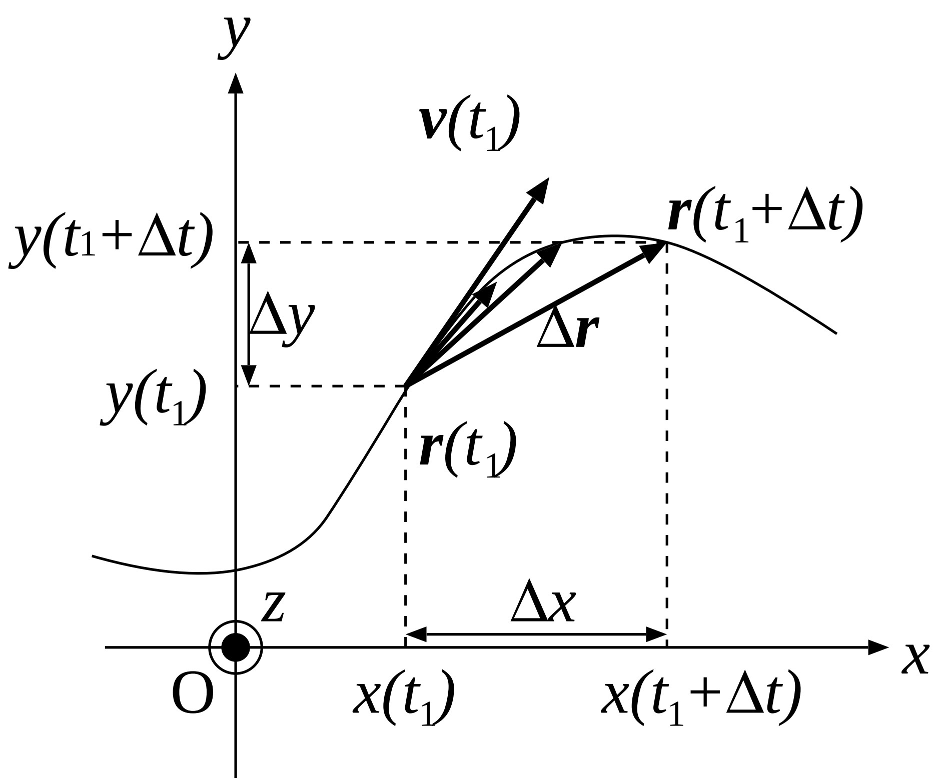
$$= (\Delta x)\boldsymbol{i} + (\Delta y)\boldsymbol{j} + (\Delta z)\boldsymbol{k} \tag{78}$$

Δt 秒間の平均速度ベクトル

$$\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}(t_1 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_1)}{\Delta t}. \tag{79}$$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k} \tag{80}$$

時刻 t_1 **における (瞬間) 速度ベクトル** $\boldsymbol{v}(t_1)$ **を求めるには**, $\Delta t \to 0$ **の極限を考えればよい**.



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t_1) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_1+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_1)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k} \right) \\
&= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_1)\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_1)\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t_1)\boldsymbol{k} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_1) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_1) \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t_1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{81}
$$

要するに成分ごとに微分すればおっけー.

一般に, **時間の関数であるベクトル** (**ベクトル関数**) $\boldsymbol{A}(t)$ **があったとき**,

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(t_1+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t_1)}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}(t_1) \\ \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t}(t_1) \\ \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t}(t_1) \end{pmatrix}} \tag{82}$$

を $\boldsymbol{A}(t)$ **の** $t=t_1$ **における微分といい**, $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}(t_1)}$ **と書く**.

つまり, **いまは** $\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)$.

速さ

$$\text{時刻 } t_1 \text{ における速さ} = \left| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t_1) \right|. \tag{83}$$

- $\boxed{52}$ はベクトル. 大きさと向きがある.
- $\boxed{53}$ はスカラー. 速度の絶対値. 大きさだけ.

速度ベクトルの性質

- 速度ベクトルの向きは $\boxed{54}$. (瞬間の向き)
- 速度ベクトルの大きさは, 速さに比例. (瞬間の速さ)
- 物体が静止 $\Leftrightarrow$ 速度ベクトルが $\boxed{55}$ $\Leftrightarrow$ 速さが零.

アニメ

6.5 加速度ベクトル

香中 p.30

時刻 t_1 における加速度ベクトル　$\boldsymbol{a}(t_1)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}(t_1)$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_1)\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_1)\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t_1)\boldsymbol{k}\right)\\
&=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t_1)\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t_1)\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t_1)\boldsymbol{k}=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t_1)\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t_1)\\ \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t_1)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{84}
$$

やっぱり成分ごとに微分すればおっけー．このベクトルを，

$$\boxed{\boldsymbol{a}(t_1)=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t_1)}$$

と書く．

アニメ　http://hig3.net> i/V/EZ **アプリ** > **いろんな運動**

例題 14

物体が, $\boldsymbol{r}(t)=\begin{pmatrix} t+\sin t \\ 2t+2\sin t \\ \sqrt{5}\cos t \end{pmatrix}$ で運動している.

1. 速度ベクトル, 加速度ベクトルを求めよう.
2. 静止する時刻を求めよう.
3. 速さが最大となる時刻を求めよう.

56

微分の計算方法忘れた人は 香中 2.2, 微積分 2 章,5 章 **で復習!**

quiz 8

物体 P **が**, $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t) = \begin{pmatrix} t^2-4 \\ -t^3+2 \\ -8t+3 \end{pmatrix}$ **で運動している.**

1. P **の速度** $\boldsymbol{v}(t)$, **加速度** $\boldsymbol{a}(t)$ **を求めよう.**
2. P **の速さが最小となる時刻を求めよう.**
3. P **の速さが最小である時刻における位置, 速度, 加速度を求めよう.**
4. **物体** Q **が**

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} = \begin{pmatrix} t^2-4t \\ -t^3+2t \\ -8t \end{pmatrix} \tag{85}$$

で運動している. 物体 P **と** Q **が最も接近する時刻を求めよう.**

57

きょうのメッセージ

58

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \\ A_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix} \tag{86}$$

教科書のお奨め問題

例題 2.2(p.30), 香中 2.7 章末問題 2.1,2.2,

講義のビデオ

UserID:　　Password:

科目のページ + リクエスト / 質問 / 苦情用掲示板

http://hig3.net

全体	目次	前回	次回	略解