# quiz 略解 8

1. $\boldsymbol{v}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -3t^2 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{a}(t) = \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -6t \\ 0 \end{pmatrix}$
2. 速さを $v(t)$ とすると, $f(t) = v(t)^2 = (2t)^2 + (-3t^2)^2 + (-8)^2$. これが最小になる時刻を求める. 微分して $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) = 8t + 36t^3$. 増減表を書くと, $t = 0$ で最小.
3. $\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. 相対位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t) - \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}(t)$ とおいたとき, $|\boldsymbol{r}_1(t)|^2 = 20t^2 - 40t + 29$ が最小になる時刻を求めればよく, $t = 1$.

**夏のプチテストやります!** 06/23(木) です. 科目の成績 100 点のうち 25 点分. 範囲などは掲示参照.

## 先週のメッセージ

**位置** $\boxed{\boldsymbol{r}(t)}$ $\xrightarrow{\text{微分}}$ **速度** $\boxed{\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)}$ $\xrightarrow{\text{微分}}$ **加速度** $\boxed{\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)}$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix} \tag{87}$$

## 6.6 相対速度

**物体** P,Q **の位置ベクトル**: $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t), \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}(t)$

**物体** Q **に対する 物体** P **の相対位置ベクトル**: $\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t) - \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}(t)$

**物体** Q **に対する 物体** P **の相対速度ベクトル**:

$$\boldsymbol{v}_1(t) = \boxed{\phantom{xx}59\phantom{xxxxxx}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}}{\mathrm{d}t}(t) - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}}{\mathrm{d}t}(t).$$

## 例題 15

**物体** P, **物体** Q **の位置ベクトルを** $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t)=\begin{pmatrix} 2\cos t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ **とする**. **物体** P **の** Q **に対する相対速度の大きさがもっとも大きい時刻を求めよう**.

60

# 7. 位置速度加速度ベクトルと積分

香中 3 章

## 7.1 積分は微分の逆

変数 $t$ の関数 $f(t), F(t)$ が,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = f(t)} \tag{88}$$

を満たすとする (例えば, 位置 $x(t) = F(t)$, 速度 $v(t) = f(t)$). このとき,

$$\boxed{\int f(t)\mathrm{d}t = F(t) + C.} \tag{89}$$

- $f(t)$ は $F(t)$ の (1 階) 微分, 61
- $F(t) + C$ は $f(t)$ の (不定) 積分, 62 , $C$ は積分定数.

# 積分の計算法

香中 p.50　微積分 5.6

- 63 .
- 64 .
- 三角関数の積分
- 指数関数の積分
- 置換積分 (変数変換)
- 部分積分
- 公式集を見る
- いろんな超絶技巧

## 7.2 速度の積分は位置

**位置** $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, **速度** $\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **に対して**,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = v_1(t) \quad \text{だから} \quad x(t) = \int v_1(t)\mathrm{d}t + C = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t + C \quad (90)$$

| 位置 | | 速度 |
|---|---|---|
| $x(t)$ | $\xrightarrow{\text{微分}}$ <br> $\xleftarrow{\text{積分}}$ | $v_1(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ |

**例題 16**

1. **物体の速度が** $v_1(t) = t^2 - \sin(2t)$ **である．また**, $x(0) = 2$ **である．** $x(2\pi)$ **を求めよう．**

2. **物体の速度が** $v_1(t) = \frac{1}{t} - \cos(\pi t)$ **である．最初** $t = 1$ **から 最後** $t = 2$ **までの座標の変位** $\Delta x = x(2) - x(1)$ **を求めよう．**

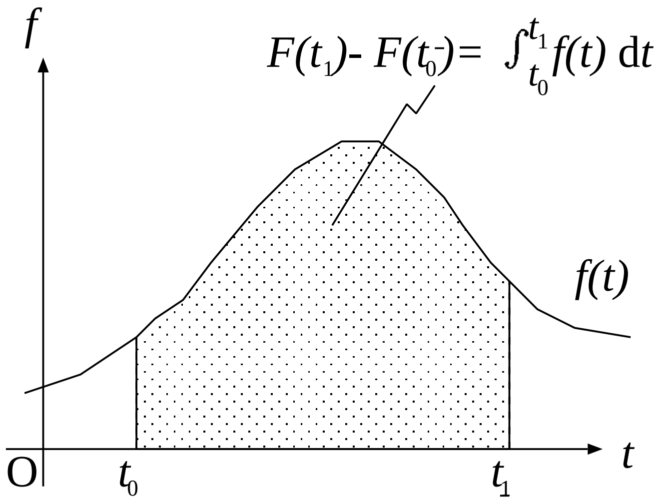
$x(0) = 2$ のような条件を, 65 という. 積分定数は, これを用いて決めることができる.

66

## 7.3 速度の定積分は変位

香中 p.64　微積分 4.2

$$F(t) = \int f(t)\mathrm{d}t + C \tag{91}$$

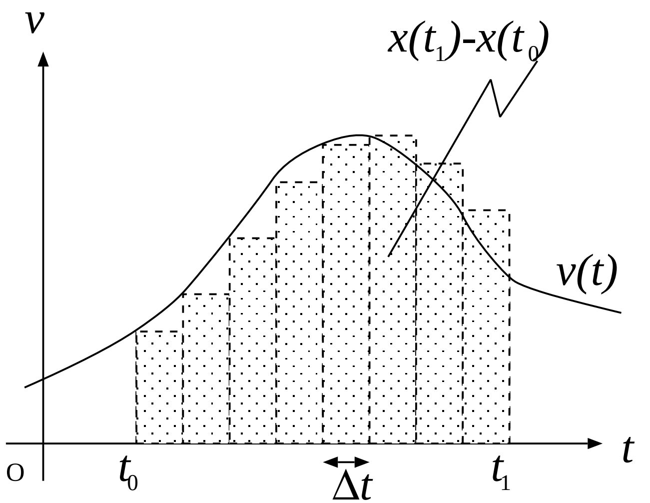



**のとき,**

$$F(t_1) - F(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\mathrm{d}t \tag{92}$$

**を定積分という．これは,** $f(t)$ **のグラフと** $t = t_0$, $t = t_1$ **で囲まれる部分の面積.**

$t = t_0$ **から** $t = t_1$ **までの** $x$ **座標の変位** $\Delta x$ **は**




$$\boxed{\Delta x = x(t_1) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} v_1(t)\mathrm{d}t} \tag{93}$$

**のように定積分で表わせる.**

# 例題 16 の 1 の別解

$$\boxed{67}. \tag{94}$$

## 7.4 速度ベクトルの積分は位置ベクトル

時刻 $t$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$ とすると, 速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ は

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{v}(t) \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} \tag{95}$$

で与えられるのだった. したがって逆に,

$$x(t) = \int v_1(t)\mathrm{d}t + C_1, \tag{96}$$

$$y(t) = \int v_2(t)\mathrm{d}t + C_2, \tag{97}$$

$$z(t) = \int v_3(t)\mathrm{d}t + C_3. \tag{98}$$

$C_1, C_2, C_3$ は積分定数. これをまとめて, 次のようにかく.

$$\boxed{\boldsymbol{r}(t) = \int \boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{C}. \ (\textbf{ベクトル値関数の積分})} \tag{99}$$

## 7.5 加速度ベクトルの積分は速度ベクトル

**同様に加速度ベクトルは**, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}(t)$ **より**,

$$v_1(t) = \int a_1(t)\mathrm{d}t + D_1, \tag{100}$$

$$v_2(t) = \int a_2(t)\mathrm{d}t + D_2, \tag{101}$$

$$v_3(t) = \int a_3(t)\mathrm{d}t + D_3. \tag{102}$$

**よって** $$\boxed{\boldsymbol{v}(t) = \int \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{D}.} \left(\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \textbf{は積分定数}\right) \tag{103}$$

## 例題 17

**物体が, 加速度** $\boldsymbol{a}(t)=\begin{pmatrix}-4\cos(2t)\\-2\sin(2t)\\0\end{pmatrix}$ **で運動している. 初期条件を速度** $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(0)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ **とする. 最も遅く動いている時刻とその速さを求めよう.**

68

## 7.6 等速直線運動

**加速度が** 0, **つまり**, $\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{0}$ **の場合を考える**.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \end{cases} \overset{\text{積分}}{\leadsto} \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = C_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = C_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = C_3 \end{cases} \overset{\text{積分}}{\leadsto} \begin{cases} x(t) = C_1 t + D_1 \\ y(t) = C_2 t + D_2 \\ z(t) = C_3 t + D_3 \end{cases} \tag{104}$$

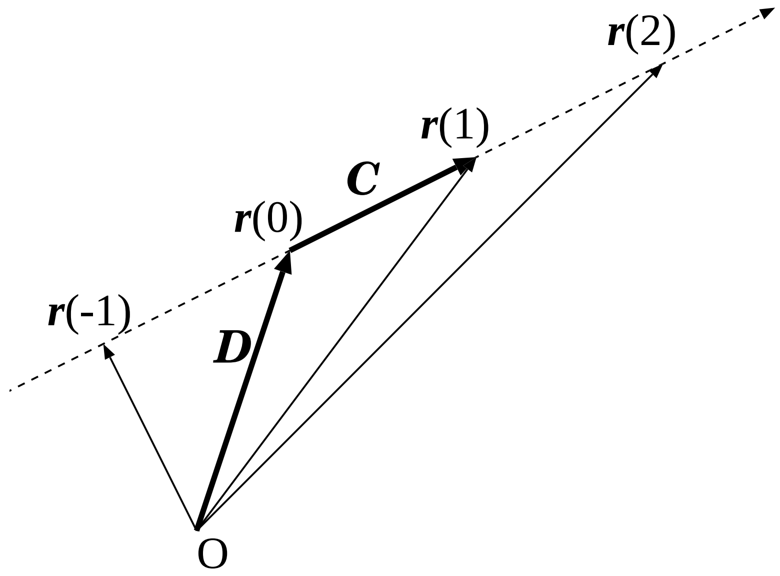
**別の書き方では**

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{0}, \leadsto \boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{C}, \leadsto \boxed{\text{69} \qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{105}$$

**ただし**, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$ **は積分定数**.

**これって直線のパラメータ表示**.

等速直線運動 $\rightarrow$ **アニメ** i/V/EZ **アプリ**




**軌跡の式は**, $t$ **を消去して**

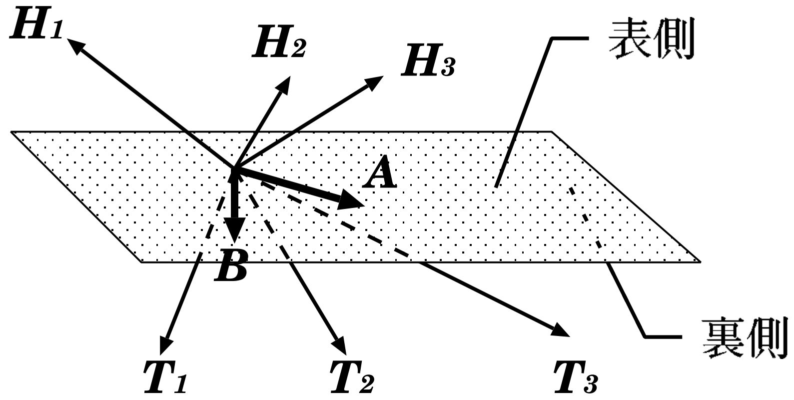
$$\frac{x-D_1}{C_1}=\frac{y-D_2}{C_2}=\frac{z-D_3}{C_3}. \tag{106}$$

# quiz 9

$x, y, z$ 軸の正の向きの基本ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする．ベクトル $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．

ベクトル $A, B$ の両方がのっている平面は 1 つだけある (図では薄く塗られている．それは $xy$ 平面とは異なる)．下の図は，その平面を斜めから見たものである．

物体が平面の表裏どちら側にあるかについて，位置ベクトルが $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \boldsymbol{H}_3$ のようなものを表側，位置ベクトルが $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3$ のようなものを裏側にあるということにする．




物体の，加速度ベクトルは，$\boldsymbol{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ である．また，この物体の運動は $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{r}(-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす．

1. 物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよう．

2. **物体が平面上にある時刻を求めよう.**

3. **物体の位置ベクトルが裏側にある時間の長さを求めよう.**

70

## 今週のメッセージ

71

## 教科書のお奨め問題

香中例題 3.1(p.51), 香中 3.7 章末問題 3.1, 3.8

## 講義のビデオ

UserID:

Password:

科目のページ + リクエスト / 質問 / 苦情用掲示板

http://hig3.net