quiz 略解 9

1. **加速度は**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = -2$$

積分して,

$$x(t) = C_1 t + D_1$$
$$y(t) = C_2 t + D_2$$
$$z(t) = -t^2 + C_3 t + D_2$$

初期条件より,

$$x(t) = -t$$
$$y(t) = -t$$
$$z(t) = 1 - t^2$$

2. $\boldsymbol{r}(t) \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \mathbf{0}$ **のとき**, $\boldsymbol{r}(t)$ **は平面上にある**. $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ +3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{r}(t) \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = -3t^2 + 2t + 3$ **より**, $t = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}$.

3. $\boldsymbol{r}(t) \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) > 0$ **のとき裏側にあるので**, $\frac{1+\sqrt{10}}{3} - \frac{1-\sqrt{10}}{3} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$.

8. いろいろな運動

加速度 $\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)$ がいろいろな関数のときに, $\boldsymbol{r}(t)$ がどうなるか見てみよう.

8.1 等速直線運動

$\boldsymbol{a}(t) = 0$ の場合を考える.

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \end{cases} \overset{\text{積分}}{\rightsquigarrow} \begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = C_1 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = C_2 \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = C_3 \end{cases} \overset{\text{積分}}{\rightsquigarrow} \begin{cases} x(t) = C_1t + D_1 \\ y(t) = C_2t + D_2 \\ z(t) = C_3t + D_3 \end{cases} \tag{107}$$

別の書き方では

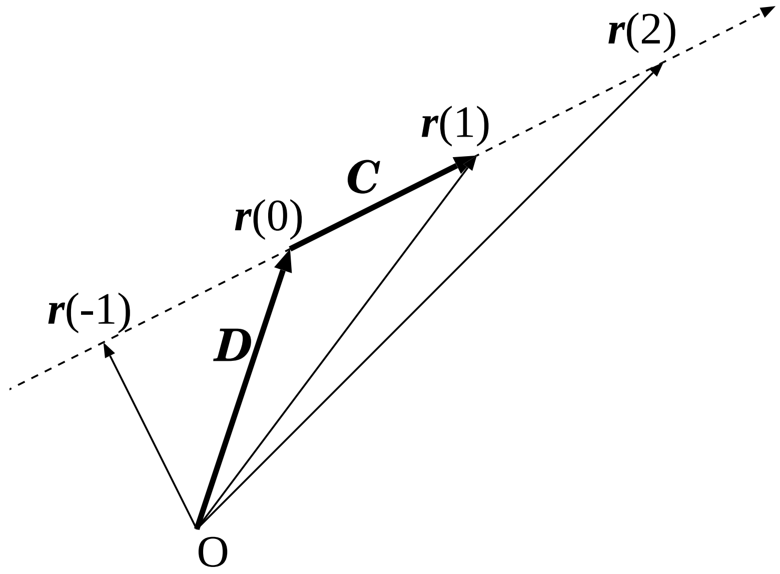
$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{0}, \rightsquigarrow \boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{C}, \rightsquigarrow \boxed{{}^{72}\qquad\qquad\qquad} \tag{108}$$

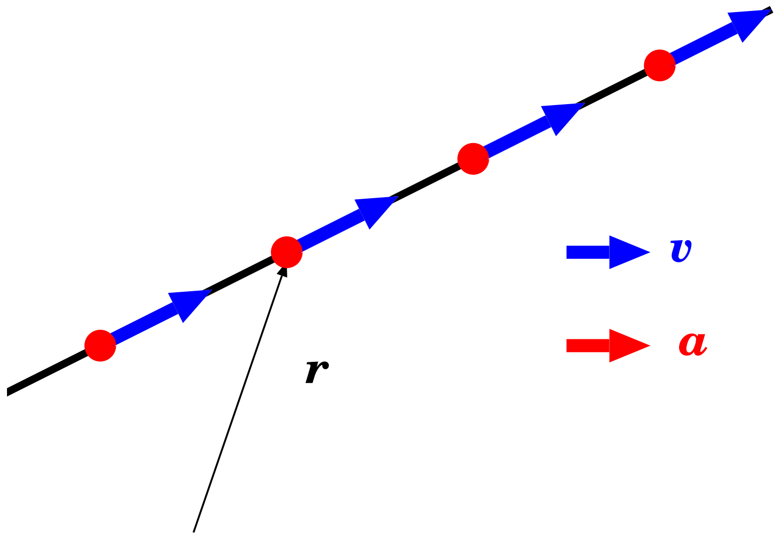
ただし, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$ **は積分定数**.

これって直線のパラメータ表示.

軌跡 t **を消去して**

$$\frac{x - D_1}{C_1} = \frac{y - D_2}{C_2} = \frac{z - D_3}{C_3}. \tag{109}$$





等速直線運動 → **アニメ** i/V/EZ **アプリ**

8.2 等加速度運動 (=放物運動)

加速度の向き, 大きさが時間 t で変化しない (時間に依存しない ともいう), つまり, $\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ が定数の場合を考える. 運動方程式から,

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = A_1 & & \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = A_1 t + C_1 & & x(t) = \frac{1}{2}A_1 t^2 + C_1 t + D_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = A_2 & \rightsquigarrow & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = A_2 t + C_2 & \rightsquigarrow & y(t) = \frac{1}{2}A_2 t^2 + C_2 t + D_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = A_3 & & \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = A_3 t + C_3 & & z(t) = \frac{1}{2}A_3 t^2 + C_3 t + D_3 \end{array} \tag{110}$$

別の書き方では

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{A} \rightsquigarrow \boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{C}, \tag{111}$$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{73}$

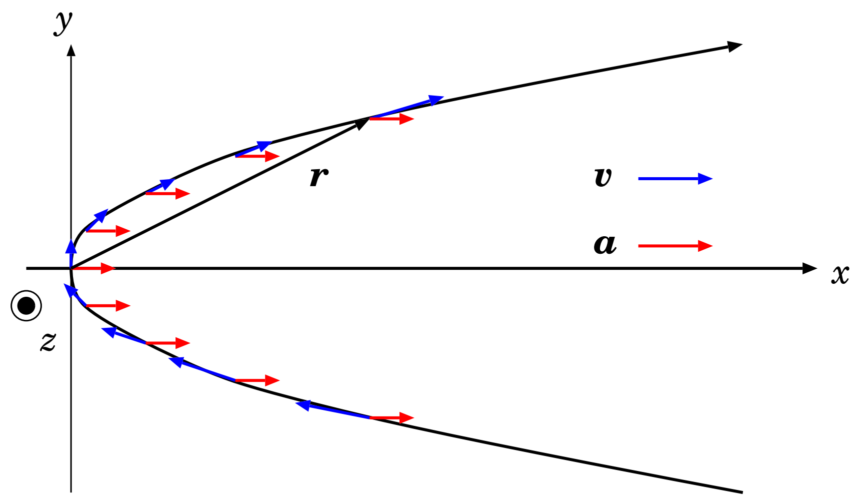
簡単のために, A, C, D **の各成分のうち**, A_1, C_2 **以外が零である場合を考える**.

$$x(t) = \frac{1}{2}A_1 t^2, \quad y(t) = +C_2 t, \quad z(t) = 0. \tag{112}$$

$\boxed{\textbf{軌跡}}$ t **を消去して**,

$z = 0$, $\boxed{74\qquad\qquad}$.

つまり, xy **平面上の放物線**.



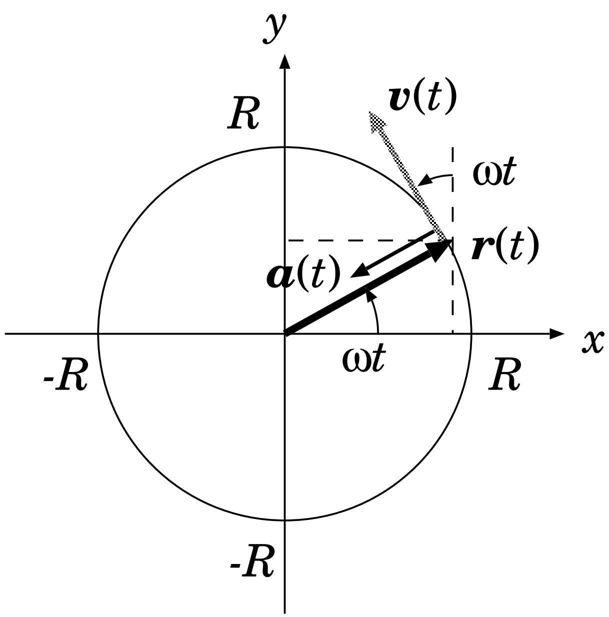
これは $\boxed{\textbf{等加速度運動}}$ $\rightarrow$ **アニメ** i/V/EZ **アプリ**

8.3 等速円運動

なぜかこの場合は先に $\boldsymbol{r}(t)$ を考えます. $R, \omega > 0$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -R\omega^2 \cos\omega t & & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -R\omega \sin\omega t & & x(t) = R\cos\omega t \\
&\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = -R\omega^2 \sin\omega t & \overset{\text{微分}}{\longleftarrow} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = +R\omega \cos\omega t & \overset{\text{微分}}{\longleftarrow} & y(t) = R\sin\omega t \\
&\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 & & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = 0 & & z(t) = 0
\end{aligned}
\tag{113}
$$

$\boldsymbol{r}(t)$ **の向きは**, x **軸の正の向きから 反時計回りにはかって** ωt (**時刻に比例**)



軌跡

t **を消去すると**,$x^2+y^2 = R^2, z = 0$ **より**,

75

速度ベクトル

速さ $v = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right| = (R^2\omega^2\cos^2\omega t + R^2\omega^2\sin^2\omega t)^{\frac{1}{2}} = R|\omega|$. (**一定**)

$\omega > 0$ **なら** $\boxed{76}$, $\omega < 0$ **なら** $\boxed{77}$ **に運動**.

$\boldsymbol{r}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = 0$ **より**, **等速円運動では位置ベクトルと速度ベクトルは直交**.

速度ベクトルを位置ベクトルで表わそう

$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$ **とおく** ($\boldsymbol{k}$ **は** z **軸の正の向きの単位ベクトル**), **このとき**,

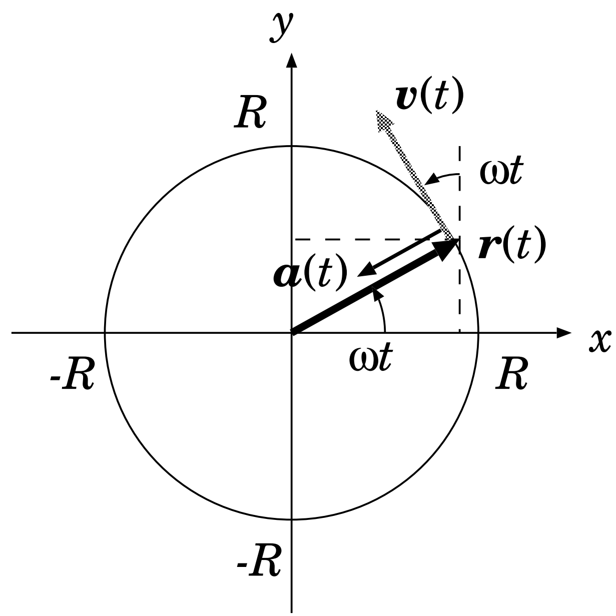
$$\boxed{78} \quad \textbf{(外積)} \tag{114}$$

Check1: **大きさは** $|\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}(t)| = |\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{r}(t)|\sin\frac{\pi}{2} = R\omega$. **向きは**, $\boldsymbol{v}(t)$ **は**, $\boldsymbol{\omega}$,$\boldsymbol{r}(t)$ **の両方に垂直**, $\langle\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{v}(t)\rangle$ **が右手系をなすことから決まる**.

Check2: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} =$ (**外積を成分で計算**) $= \begin{pmatrix} -R\omega\sin\omega t \\ +R\omega\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$

加速度ベクトル

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega^2\cos\omega t \\ -R\omega^2\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2\boldsymbol{r}(t). \quad (115)$$



加速度の 79 **は一定,** 80 **は一定でない.**

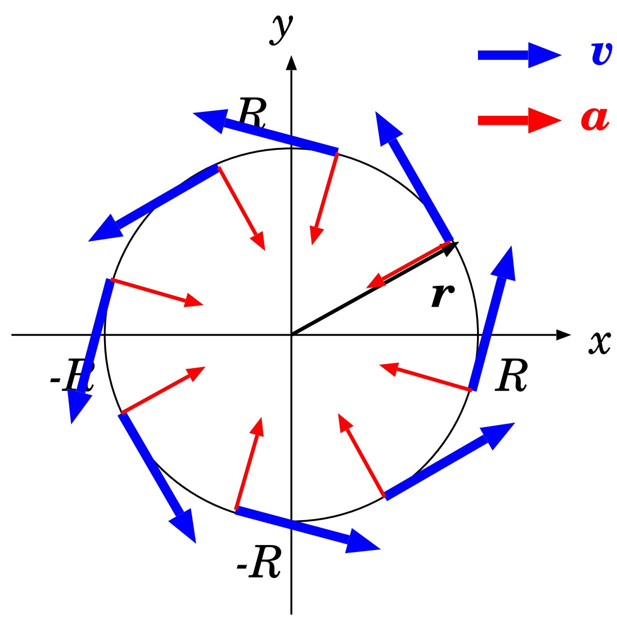
加速度の大きさ $\left|\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)\right| = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$.(**一定**)

向きは $\boldsymbol{r}(t)$ **と平行で逆向き.**

つまり, 加速度は回転の中心を向いている

(**向心加速度といわれる**)

したがって, 速度ベクトル $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ **とは直交.**



8.4 速さ一定の運動

速度 $\boldsymbol{v}(t)$ が, $|\boldsymbol{v}(t)|=$ 一定 であるとする. (等速運動) つまり, カーブも速さ (=速度の大きさ) 変えずに曲がる危ない運転. 速度の向きは変ってもいい. だから, ふつう 81 ではない.

→ アニメ i/V/EZ アプリ

$$|\boldsymbol{v}(t)|=C \quad (\text{一定}) \Rightarrow \boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)=C^2 \tag{116}$$

次のページのやり方にしたがって両辺を t で微分して

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)) \tag{117}$$

82

速度ベクトルと加速度ベクトルは直交 (どっちかが零ベクトルかも)

速さ v, **半径** R_1 , **速さ** v, **半径** R_2 **の円運動の加速度は** $\frac{v^2}{R_1}, \frac{v^2}{R_2}$

→ 83 **(半径に反比例)**

8.5 内積, 外積, スカラー倍の微分

上では $\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)$ **を微分したが, 一般に,** $\boxed{\text{ス}}$**カラー値関数** $f(t)$ $\boxed{\text{ベ}}$**クトル値関数** $\boldsymbol{A}(t), \boldsymbol{B}(t)$ **に対して,**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boxed{\text{ベ}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(t)\boldsymbol{A}(t)) \qquad =\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)\boldsymbol{A}(t)+f(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}(t)=\boxed{\text{ベ}} \tag{118}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boxed{\text{ス}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)) =\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}(t)=\boxed{\text{ス}} \tag{119}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boxed{\text{ベ}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}(t)\times\boldsymbol{B}(t))=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}(t)\times\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}(t)=\boxed{\text{ベ}} \tag{120}$$

つまり '普通のスカラー関数の場合の積の微分法' (左だけ微分プラス右だけ微分) みたいな式が成立する.

証明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)\boldsymbol{A}(t)] = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)A_1(t)] \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)A_2(t)] \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)A_3(t)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)A_1(t)+f(t)\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)A_2(t)+f(t)\frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)A_3(t)+f(t)\frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)\begin{pmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \\ A_3(t) \end{pmatrix} + f(t)\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)\boldsymbol{A}(t) + f(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}(t).$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A_1(t)B_1(t) + A_2(t)B_2(t) + A_3(t)B_3(t)] \\ &= \frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}(t)B_1(t) + A_1(t)\frac{\mathrm{d}B_1}{\mathrm{d}t}(t) \\ &+ \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t}(t)B_2(t) + A_2(t)\frac{\mathrm{d}B_2}{\mathrm{d}t}(t) \\ &+ \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t}(t)B_3(t) + A_3(t)\frac{\mathrm{d}B_3}{\mathrm{d}t}(t) \\ &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t) + \boldsymbol{A}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}(t). \end{aligned}$$

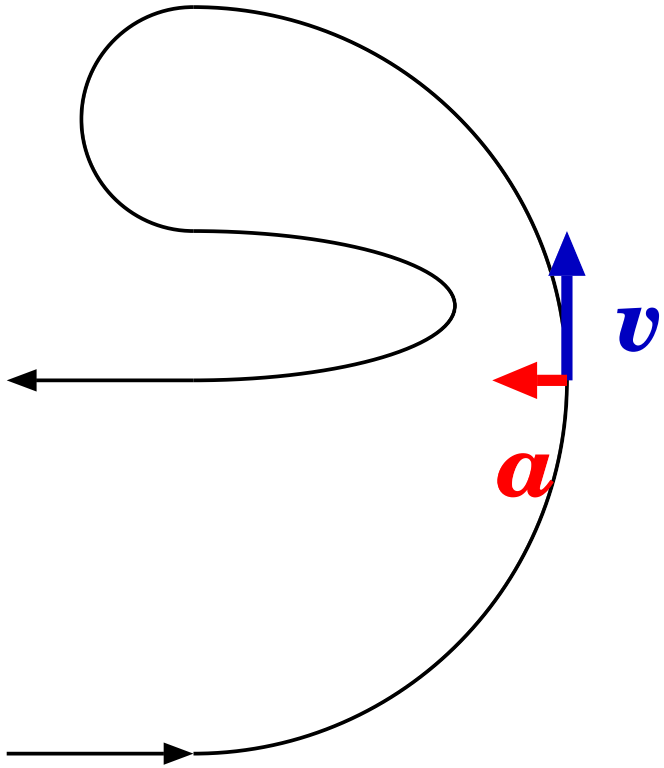
例題 18

運動の軌跡が原点を中心とする円周 (の一部) であるとき, 位置ベクトルと速度ベクトルはいつでも直交することを示そう.

84

quiz 10

曲線上を, 物体が, 矢印の向きで等速運動 (速さ一定の運動) している. 1 点について, 速度ベクトル v, 加速度ベクトル a が記してある. 他の点について, 速度ベクトル, 加速度ベクトルを書き加えよう. (零ベクトルになっている点では, • をうってね)



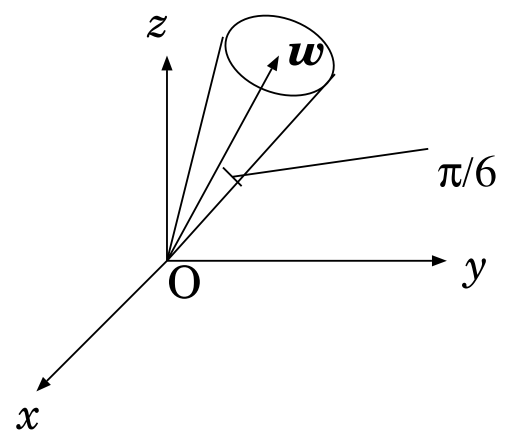
Hint:

- **全体が速さ一定の運動だけど, 一部分では等速直線運動, 等速円運動だよね.**
- **速度ベクトルは軌跡に接する.**
- **速さ v の等速円運動の加速度の大きさは $\frac{v^2}{R}$.**

quiz 11

原点にスポットライトがあり, ベクトル $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 方向に, 広がりの角 $\frac{\pi}{6}$ で円錐状に広がる光を発している.

つまり, 光の当っている領域は, 原点を頂点とする, 無限に高い, 傾いた円錐であり, ベクトル $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ は円錐の中心軸に平行で, 頂点から底面に向かう向きである. (図の描き方は不正確です.) また, 円錐の軸と母線のなす角は $\pi/6$ である.



質量 $m = 1$ の物体が $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 6 \end{pmatrix}$ にしたがって運動している.

1. 物体の速度ベクトルと, 加速度ベクトルを求めよう.
2. 物体の速度ベクトルと, 位置ベクトルとのなす角が $\frac{1}{4}\pi$ である時刻を求めよう.
3. 物体に光が当っている時間帯を求めよう.

85

夏のプチテストやります! 来週 06/23 です. 25 点分です.

科目のページ + リクエスト / 質問 / 苦情用掲示板

http://hig3.net

講義のビデオ

UserID:

Password: