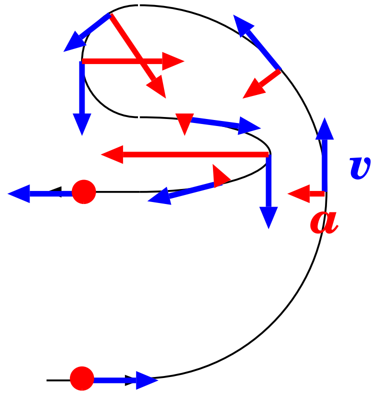
quiz 略解 10

速度ベクトルの方向は軌跡の接線方向．向きは進行方向．速度ベクトルの大きさは一定 (あらかじめ描いてあるものにそろえる)



加速度ベクトルの向きは，速度ベクトルの向きに直交し，鋭角側 (円形なら内側) 向き．加速度ベクトルの大きさは，鋭く曲がっているところほど大きくなる．特に，直線の部分では 0.

quiz 略解 11

1. **速度ベクトル** $\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. **加速度ベクトル** $\boldsymbol{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. $\frac{\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)}{|\boldsymbol{v}(t)||\boldsymbol{r}(t)|} = \cos\frac{1}{4}\pi$ **を解くと**, $t = \pm 3\sqrt{2}$.
3. $\frac{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}(t)}{|\boldsymbol{w}||\boldsymbol{r}(t)|} > \cos\frac{1}{6}\pi$ **を解くと**, $-\sqrt{\frac{10}{3}} < t < +\sqrt{\frac{10}{3}}$.

9. 運動方程式と放物運動

9.1 ニュートンの運動方程式 (運動の第 2 法則)

香中 p.30

物体の加速度ベクトル $\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)$ は, 物体の受ける 力 ベクトル $\boldsymbol{F}(t)$ で決まる.

加速度ベクトルの向き: 力 $\boldsymbol{F}(t)$ の向きと同じ.

加速度ベクトルの大きさ: 質量 m に反比例, 力 $\boldsymbol{F}(t)$ の大きさに比例.

86　　(121)

これを ニュートンの運動方程式 という.

質量とは 質量の単位: kg (キログラム). 質量はスカラー.

水 1 リットルの質量は 1kg. 1 円玉の質量は 1g=0.001 kg.

基本ベクトル $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ を使って $\boldsymbol{F}(t)=F_1(t)\boldsymbol{i}+F_2(t)\boldsymbol{j}+F_3(t)\boldsymbol{k}$ と書くと

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=F_1(t), \tag{122}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t)=F_2(t), \tag{123}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t)=F_3(t). \tag{124}$$

きょうのメッセージ 1

位置	微分 $\longrightarrow$ / 積分 $\longleftarrow$	速度	微分 $\longrightarrow$ / 積分 $\longleftarrow$	加速度
$\boldsymbol{r}(t)$		$\boldsymbol{v}(t)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)$		$\boldsymbol{a}(t)=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)$

87

成分ごとに微分積分すればおっけー．積分定数 (ベクトル) C, D は初期条件から決まる．

例題 19

質量 $m = 2$ **の物体が, 力**

$$\boldsymbol{F}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{125}$$

のもとで運動している. 時刻 t **における位置ベクトルを** $\boldsymbol{r}(t)$ **とする. 初期条件は**

$$\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{126}$$

である. 位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ **を求めよう.**

88

9.2 物理量と単位系

運動方程式 $m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{F}(t).$ x 成分は $m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_1(t).$ (127)

世の中の量には単位がある.

例	量	本家の単位	スペル	略記	邪道な単位
x	長さ	メートル	meter	[m]	尺, ヤード
m	質量	キログラム	kilogram	[kg]	オンス, ポンド
t	時間	秒	second	[s]	分, 年, 週
	電流	アンペア	ampere	[A]	
	角度	ラジアン	radian	[rad]	度

上の単位を基本として, 他の量の単位は, 上の単位の組み合せで作る. これを MKSA 単位系という. [kg 重] は邪道です.

例	量	作り方	単位	略記
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	速度	長さ/時間	メートル毎秒	[m/s]
	体積	(長さ)^3	立方メートル	[m^3]
	密度	質量/体積		[kg/m^3]
$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$	加速度	速度/時間	メートル毎秒毎秒	[m/s^2]
F_1	力	質量 $\times$ 加速度		89

力 $F_1(t) = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)$, 加速度 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$.

1m/s^2 の加速度では, 速度が 1s に 1m/s 増加する.

1kg の物体が 1kg·m/s^2 の力を受けると 1m/s^2 の加速度で運動.

キログラムメートル毎秒毎秒 $\rightsquigarrow$ ニュートン [kg·m/s^2]$\rightsquigarrow$[N]

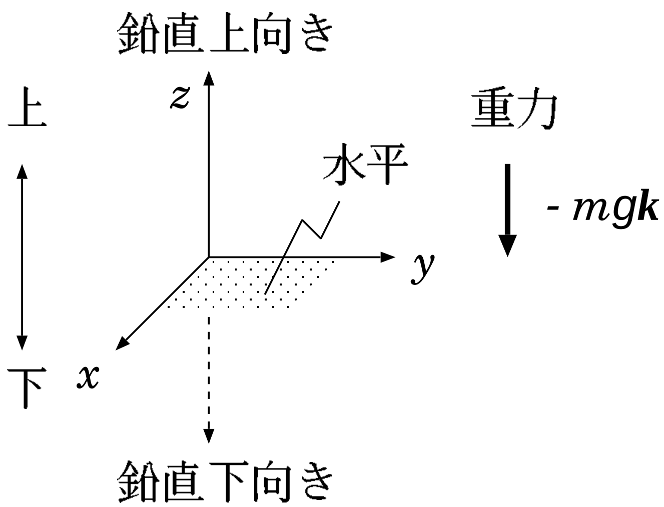
9.3 地球上でよく使う座標系

地球上には上下がある．物の落ちる方向を下という．

xyz 座標軸は, 右手系で, z 軸の負の向きが下になるようにとり, x, y 軸はそれと直交するように (東西南北とは関係なく) 適当にとるのが普通.

z 軸方向　90

xy 軸方向　水平方向 (xy 平面は水平面)



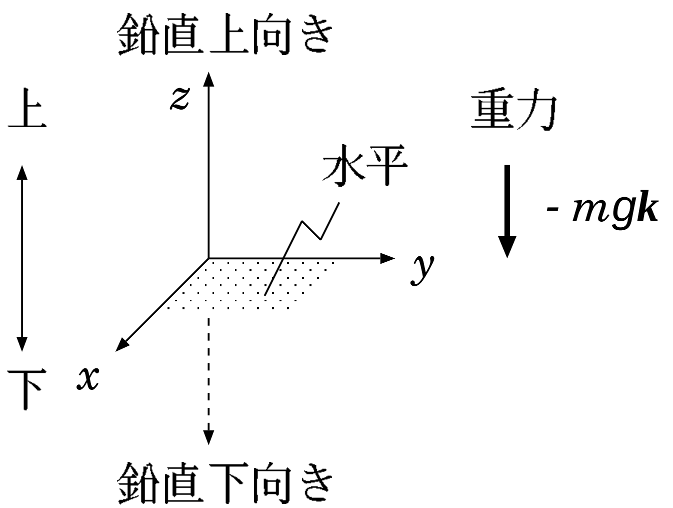
9.4 重力

香中 p.72

地球上の質量 m [kg] の物体には, 重力という鉛直下向きの大きさ mg の力 91 がはたらく.

$g = 9.8[\mathrm{m/s^2}]$: 重力加速度

つまり重力の大きさは $9.8m[\mathrm{kg{\cdot}m/s^2}]=9.8m[\mathrm{N}]$.



ちょっと紛らわしいけど, 単位は立体フォント, 変数は斜体フォントで書く習慣. 手で書くときは気にしなくていい.
m は質量, m はメートル. g は重力加速度, g はグラム.

力の別の (邪道な) 単位

1[kg 重] = 9.8 [N] = (質量 1kg の物体に地球上ではたらく重力の大きさ)

9.5 放物運動

鉛直方向に z 軸, 水平面内に x, y 軸をとる. 運動方程式は,

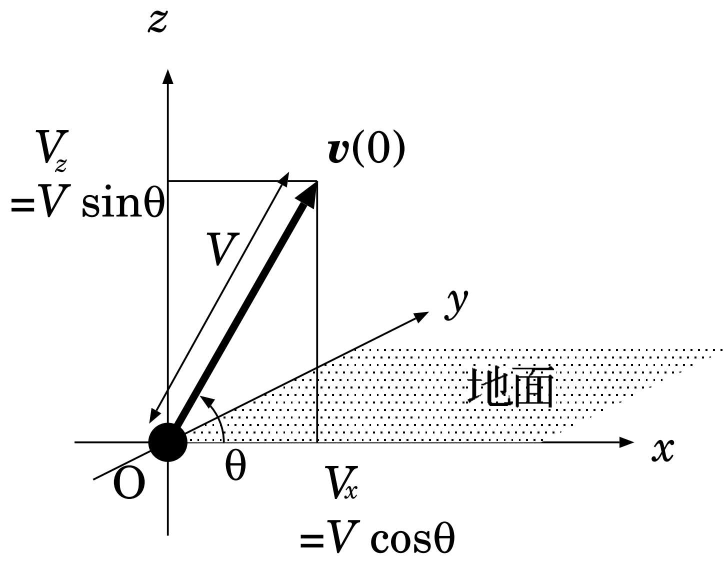
$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\boldsymbol{k} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boxed{92} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boxed{93} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boxed{94} \end{cases} \tag{128}$$

$$\overset{\text{積分}}{\rightsquigarrow} \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = C_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = C_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = -gt + C_3. \end{cases} \overset{\text{積分}}{\rightsquigarrow} \begin{cases} x(t) = C_1t + D_1, \\ y(t) = C_2t + D_2, \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3t + D_3. \end{cases}$$

$C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$: 積分定数.

これは等加速度運動 (放物運動). ‘水平 (x, y) 方向だけみると等速直線運動, 鉛直 (z) 方向だけみると等加速度運動.’

次のような初期条件で考えよう.



$$\boldsymbol{r}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \tag{129}$$

$$\boldsymbol{v}(0)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(0)=\begin{pmatrix}V\cos\theta\\0\\V\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V_x\\0\\V_z\end{pmatrix} \tag{130}$$

$(V>0)$.

水平面 $z=0$ **を地面と思うと, この初期条件は次のような意味.**

地面の点 $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ **から時刻** $t=0$ **に物を投げた.**

初速度 $\boldsymbol{v}(0)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(0)$ **の向きは,** xz **平面内で,** 95 **の向きで, 大きさは** V.

初期条件は, (V_x,V_z) **の組, あるいは** (V,θ) **の組で指定できる.**

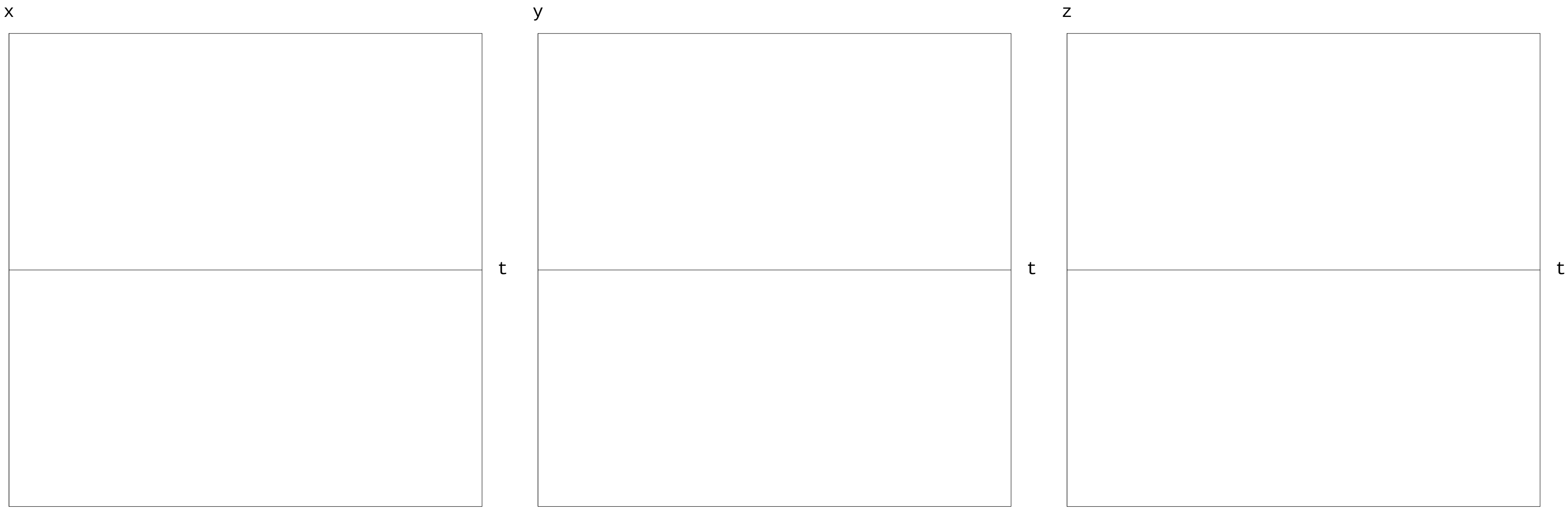
このときには,

$$x(t) = V_x t, \tag{131}$$

$$y(t) = 0, \tag{132}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_z t. \tag{133}$$

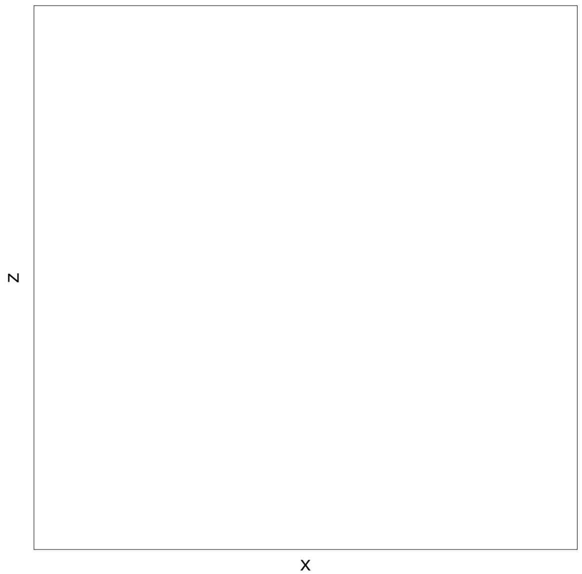
運動の様子アニメ i/V/EZ **アプリ**



xz 平面での運動の軌跡を考えよう.

(131),(133) から t を消去しよう. (131) から $t = x/V_x$ なので,

$$
\begin{aligned}
z &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V_x}\right)^2 + V_z\left(\frac{x}{V_x}\right) \\
&= -\frac{g}{2V_x^2}\left[x^2 - 2\frac{V_xV_z}{g}x\right] \leftarrow \boxed{!} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{g}{V_x^2}\left[\left(x - \frac{V_xV_z}{g}\right)^2 - \left(\frac{V_xV_z}{g}\right)^2\right] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{g}{V_x^2}(x - x_{\mathrm{m}})^2 + z_{\mathrm{m}}
\end{aligned}
\qquad (134)
$$



これは 96 ! ただし, $x_{\mathrm{m}} = \dfrac{V_xV_z}{g}$, $z_{\mathrm{m}} = \dfrac{V_z^2}{2g}$ とおいた.

$\boxed{!}$を平方完成 $$[x^2 - 2Ax] = [(x-A)^2 - A^2] \qquad (135)$$

9.6 ボールはゴールするか?

(131),(133) を使って考えよう.

でも, (131),(133) は覚えるのでなく, 導けるようにしてね.

例題 20

地面からのボールの高さが最大となる時刻を求めよう. そのときのボールの位置を求めよう.

97

例題 21

$V=20$[m/s], $\theta=30$[度] とする．このボールは, $x=20$[m] にある高さ 10[m] の壁を越えるか?

98

関数電卓の i/V/EZ アプリ

quiz 12

質量 $m=3$ **の物体が**, **力**

$$\boldsymbol{F}(t)=\begin{pmatrix}-12\cos(2t)\\-6\sin(2t)\\0\end{pmatrix} \tag{136}$$

を受けて運動している. **初期条件を** $\boldsymbol{r}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(0)=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ **とする**. $\boldsymbol{r}(t)$ **を求めよう**.

99

quiz 13

$V = 10[\mathrm{m/s}]$, $\theta = 60$[度] とする．位置 $x = 20[\mathrm{m}]$ には高さ $2.44[\mathrm{m}]$ のクロスバーがある．ボールはゴールするか (ノーバウンドで) 判定しよう．

100

講義のビデオ

UserID:

Password:

全体 | 目次 | 前回 | 次回 | 略解

科目のページ + リクエスト / 質問 / 苦情用掲示板

http://hig3.net