quiz 略解 12

運動方程式は $3\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} -12\cos 2t \\ -6\sin 2t \\ 0 \end{pmatrix}$. **積分して**

$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} -2\sin 2t + C_1 \\ \cos 2t + C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t + C_1 t + D_1 \\ \frac{1}{2}\sin 2t + C_2 t + D_2 \\ C_3 t + D_3 \end{pmatrix}$. **初期条件より**

$C_1 = 2, C_2 = -1, C_3 = 2, D_1 = -1, D_2 = 0, D_3 = 0.$

quiz 略解 13

初速は $V_x = 5[\mathrm{m/s}]$, $V_z = 5\sqrt{3}[\mathrm{m/s}]$. $x(t) = 20$ **となる時刻** $t = T$ [s] **を求めると**, $T = 4[\mathrm{s}]$. $z(4) = -\frac{1}{2}g \cdot 4^2 + 5\sqrt{3} \cdot 4 = -44[\mathrm{m}]$ **なのでバウンドしてしまう**.. **有効数字** 2 **桁なので**, 3 **桁までとって計算し**, **最後に四捨五入する**.

10. 等速円運動と単振動

10.1 単振動

質量 m の物体の, x 軸上の運動

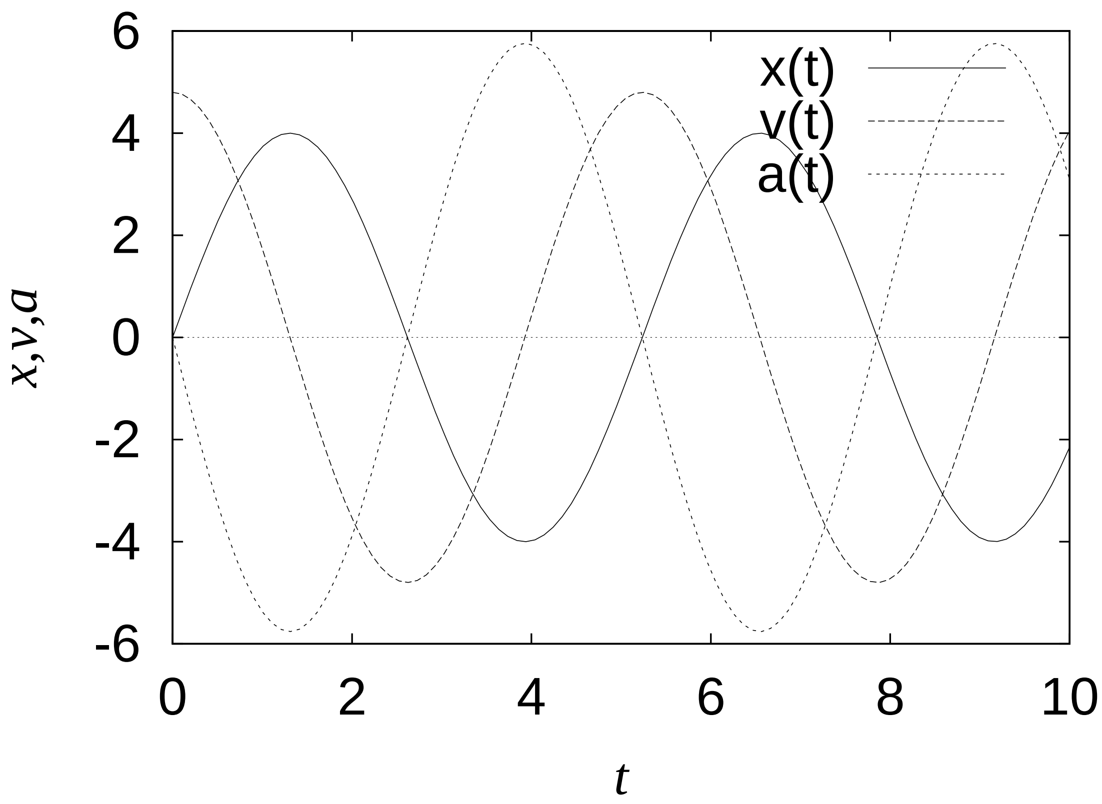
$$\boxed{\text{位置}} \qquad \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t+\phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{137}$$

を x 軸上の $\boxed{\text{単振動}}$, $\boxed{\text{調和振動}}$ **という. ただし, $R(>0), \omega, \phi$ は定数.**

$$\boxed{\text{速度}} \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega\sin(\omega t+\phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{138}$$

$$\boxed{\text{加速度}} \qquad \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega^2\cos(\omega t+\phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2\boldsymbol{r}(t). \tag{139}$$

$$\boxed{\text{力}} \qquad \boldsymbol{F}(t) = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} -mR\omega^2\cos(\omega t+\phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -m\omega^2\boldsymbol{r}(t). \tag{140}$$



アニメ i/V/EZ アプリ

単振動のいろんな量 ちょっとたいへんだけどおぼえよう.

記号	単位	名前	意味 (単振動)
R	[m]	振幅/半径	原点からの最大距離
ω	[rad/s]	角速度	単位時間あたりの位相の変化
ϕ	[rad]	初期位相	時刻 $t=0$ における位相
$\omega t+\phi$	[rad]	位相	cos の引数
$T=\frac{2\pi}{\omega}$	[s]	周期	もとの位置, 速度にもどるまでの時間
$f=\frac{1}{T}$	[1/s] $=$ [Hz]	振動数	単位時間に何回振動するかという数

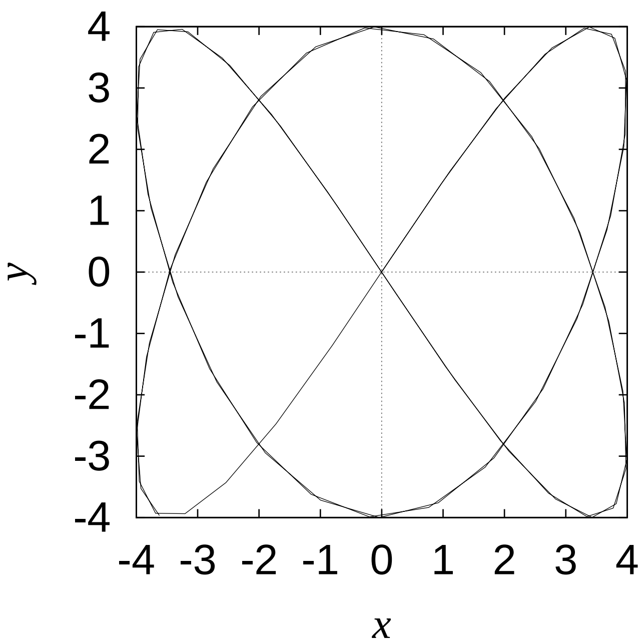
10.2 単振動の組みあわせ—リサジュー運動

x, y 軸方向に，それぞれ単振動している物体を考えよう．運動

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ R_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{141}$$

を **リサジュー運動** という．ただし，$R_i > 0, \omega_i, \phi_i$ は定数．

軌跡の例．



i/V/EZ アプリ

http://hig3.net > 物理数学☆

演習 I > リサジュー運動

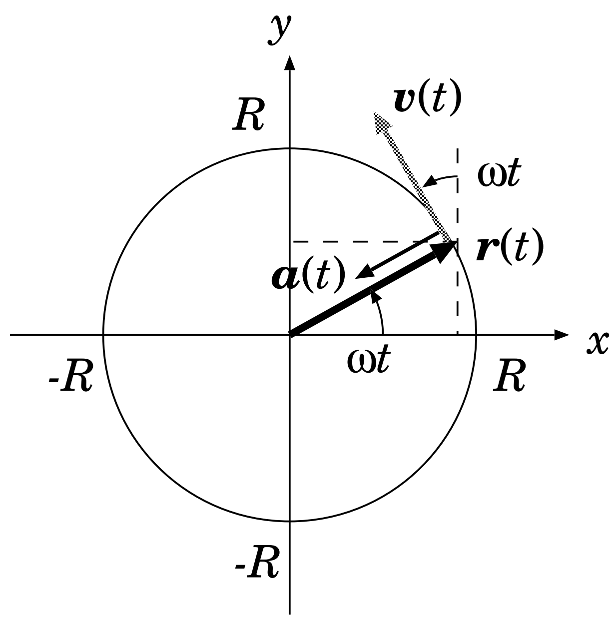
10.3 等速円運動

リサジュー運動の特別な場合 $R = R_1 = R_2, \omega = \omega_1 = \omega_2$,

$\boxed{\phi_1 = 0, \phi_2 = -\frac{1}{2}\pi}$ **を考えよう**. $\cos(\omega t - \frac{1}{2}\pi) = \sin(\omega t)$.

位置ベクトル

$$\boxed{\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}.} \qquad (142)$$



軌跡 $x^2 + y^2 = R^2, z = 0$ **より**, xy **平面上の半径** R **の円**.

$\boldsymbol{r}(t)$ **の向きは**, x **軸の正の向きから 反時計回りにはかって** ωt (**時刻に比例**)

これは等速円運動. 等速円運動の x **座標, または** y **座標だけを見ると単振動になっている**.

i/V/EZ アプリアニメ

http://hig3.net > 物理数学☆演習 I > 単振動と等速円運動

速度ベクトル

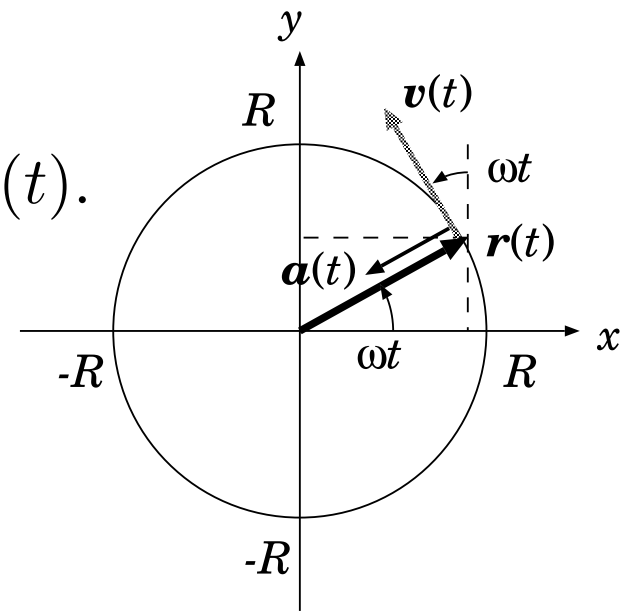
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega \sin \omega t \\ +R\omega \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{143}$$

加速度ベクトル

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \cos \omega t \\ -R\omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \boldsymbol{r}(t). \tag{144}$$

等速円運動を引き起こす力

$$\boldsymbol{F}(t) = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} -mR\omega^2\cos\omega t \\ -mR\omega^2\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = -m\omega^2\boldsymbol{r}(t). \tag{145}$$



力の 101 **は一定,** 102 **は一定でない.**

力の大きさ $\left|m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)\right| = mR\omega^2$.(**一定**)

向きは $\boldsymbol{r}(t)$ **と平行で逆向き.**

つまり, 力は回転の中心を向いている (向心力 といわれる)

したがって, 力と速度ベクトル $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ **とは直交. これは等速運動すべてに成り立つ性質なのだった (夏のプチテスト 3)**

ちょっと一般化

$\phi_1 = \phi, \phi_2 = \phi - \frac{1}{2}\pi$. ϕ:**新しい定数. いままでは** $\phi = 0$ **としてた.**

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t+\phi) \\ R\sin(\omega t+\phi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\omega(t+\frac{\phi}{\omega})) \\ R\sin(\omega(t+\frac{\phi}{\omega})) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{146}$$

これも等速円運動.

時刻 $t = 0$ **の位置が** $\begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **でなく,** $\begin{pmatrix} R\cos\phi \\ R\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$ **になっただけ.**

あるいは, $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **となる時刻が,** $t = 0$ **から** 103 **にずれただけ (出発時刻の変更).**

等速円運動のいろんな量 ちょっとたいへんだけどおぼえよう.

記号	単位	名前	意味 (単振動)	(等速円運動)
R	[m]	振幅/半径	原点からの最大距離	半径
ω	[rad/s]	角速度	単位時間あたりの位相の変化	単位時間あたりの位相の変化
ϕ	[rad]	初期位相	時刻 $t = 0$ における位相	時刻 $t = 0$ における位相
$\omega t + \phi$	[rad]	位相	$\cos$ の引数	x 軸からはかった角.
$T = \frac{2\pi}{\omega}$	[s]	周期	もとの位置, 速度にもどるまでの時間	一周するまでの時間
$f = \frac{1}{T}$	[1/s] = [Hz]	振動数	単位時間に何回振動するかという数	単位時間に何周するかという数

位置, 速度, 加速度ベクトルの大きさの間には,

$$|\boldsymbol{r}(t)| = R, \tag{147}$$

$$|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)| = R\omega, \tag{148}$$

$$|\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)| = R\omega^2 \left(= \frac{|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)|^2}{R} \right) \tag{149}$$

などの関係があることがわかる. これらはおぼえなくてよい. $\boldsymbol{r}(t)$ の式 (142) だけ書ければ, 微分して全部出せるから.

例題 22

30 秒に 1 回転しているメリーゴーラウンドがある．中心から 10[m] のところで白馬に乗っている人は円運動している．この人の角速度を求めよう．速さと加速度の大きさを求めよう．

104

10.4 単位のはいった計算

略記:

キログラムメートル毎秒毎秒 $\rightsquigarrow$ **ニュートン** $[\mathrm{kg \cdot m/s^2}] \rightsquigarrow [\mathrm{N}]$

ニュートンメートル毎アンペア毎秒 $\rightsquigarrow$ **ボルト** $[\mathrm{N \cdot m/(A \cdot s)}] \rightsquigarrow [\mathrm{V}]$

等式, **不等式の両辺は必ず同じ単位になる**.

キロ, **ミリなどは**, **単位の大きさを** 10^n **倍変える接頭語**.

倍率	接頭語		使用例
10^9	ギガ	G	ギガバイト,
10^6	メガ	M	メガヘルツ
10^3	キロ	k	
10^2	ヘクト	h	ヘクタール =ヘクト アール
10^1	デカ	da	

倍率	接頭語		使用例
10^{-1}	デシ	d	デシリットル
10^{-2}	センチ	c	
10^{-3}	ミリ	m	
10^{-6}	マイクロ	μ	
10^{-9}	ナノ	n	

例題 23

加速度の大きさ 36km/**分** ^{2} **は**, m/s^2 **でいうと**?

105

quiz 14

音楽 CD(**直径** 12cm) **は**, (**全曲の始めごろには**) **毎分約** 500 **回転している**. **このときの角速度** ω [rad/s] **と振動数** f [1/s] **を求めよう**. CD **の縁の部分は**, **どれだけの速さで動いているか求めよう**.

$\boxed{\text{注}}$ **平均** 48 **倍速の** CDROM **は**, **この約** 48 **倍の速さです**.

quiz 15

物体 1 **が**, xy **平面内で**, **原点を中心とする等速円運動をしている**. **半径は** 2, **振動数は** $\frac{1}{12}$ **で**, **運動の向きは**, (**右手系の**)z **軸の正の向きから見て反時計回りである**. **時刻** $t=0$ **の位置ベクトルを** $\boldsymbol{r}(0)=\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ **である**.

1. **初期位相を**, **初期条件から定めて**, $\boldsymbol{r}(t)$ **の式を求めよう**.
2. **物体** 1 **が直線** $y=-x, z=0$ **上にくる時刻を求めよう**.
3. **物体** 1 **は直線** $y=-x, z=0$ **の**, $-2 \leqq x \leqq -1$ **の部分を通過するか判定しよう**.
4. **物体** 2 **が**

$$\boldsymbol{r}_2(t)=\begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{150}$$

にしたがって運動している. **物体** 1 **と物体** 2 **がもっとも接近する時刻と**, **そのときの距離を求めよう**.

科目のページ + リクエスト / 質問 / 苦情用掲示板

講義のビデオ

UserID:

Password:

http://hig3.net

全体	目次	前回	次回	略解