物理数学☆演習 II 冬のプチテスト

樋口さぶろお[1]　**配布**: 2007-11-29 Thu **更新**: 2007-12-20 08:37JST

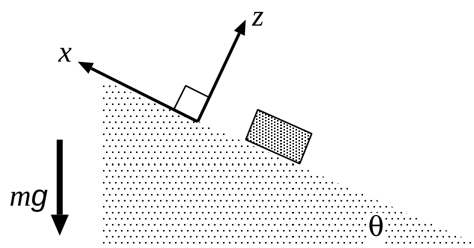
冬のプチテスト参加案内

1. **全部で 4 問, 70 分です.**
2. **解答用紙の指定された面に指定された問を解答しよう**.
3. **過程も答えよう**. **最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう**.
4. **問題文に現れない記号を使うときは**, **定義を記そう**.

1

図のような, **角度** θ **だけ傾いた粗い面の上をすべる質量** m **の物体を考える**. **物体と面の間の動摩擦係数を** μ', **重力加速度の大きさを** g **とする**.

1. **図のように**, x **軸**, z **軸を取り**, **垂直抗力の** z **成分を** N **として**, x, z **軸方向の運動方程式をそれぞれ書こう**.
2. **時刻** $t = 0$ **に原点から初速度の大きさ** v_0 **で物体を斜面にそって下向きに発射したところ**, **物体はしばらく下向きに運動した**. **運動方程式を初期条件のもとで解いて物体が下向きに動いている間の運動を求めよう**.
3. **時刻** $t = \frac{2v_0}{g}$ **まで物体が下向きに運動を続けるための**, μ' **の条件を** θ **で書こう**.



$\boxed{\textbf{まだ続きます}}$

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(**講義のページもここからたどれます**), **へや**:1 **号館** 5 **階** 502.

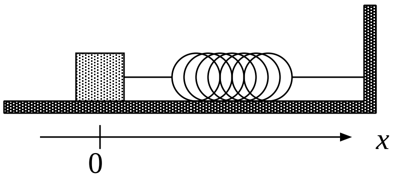
2

次の微分方程式を，与えられた初期条件のもとで解いて $x(t)$ **を求めよう．最後の答には虚数単位** $i = \sqrt{-1}$ **が残らないようにしよう．最後の答に** $\sin, \cos$ **が複数個現れても，加法定理でまとめなくてもよい．**

1. $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 6\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 25x(t) = 0, \quad x(0) = 0, \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -24.$
2. $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) - 3\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) - 4x(t) = 0, \quad x(0) = 5, \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0.$

3

質量 $m = 2$ **の物体が水平な一直線上を運動する．物体はばね定数** $k = 4$ **のばねによって壁につながれている．空気抵抗の力や摩擦力は受けない．図のように** x **軸をとる．ばねが自然長のとき，物体の位置は** $x = 0$ **である．**



時刻 $t = 0$ **に，ばねを** 2 **だけ引き伸ばして，静かに手を離した．**

1. $x(t)$ **に対する運動方程式を書こう．**
2. **初期条件を書こう．**
3. **運動方程式を初期条件のもとで解いて** $x(t)$ **を求め，虚数単位** $i = \sqrt{-1}$ **が現れない形に書こう**
4. **この運動の振幅** A**，周期** T**，振動数** f **を求めよう．**
5. **物体が自然長の位置から距離** 2 **だけ離れた点にある時刻を求めよう．**

4

関数

$$x(t) = (-1 - i)\mathrm{e}^{(-1+3i)t} + (-1 + i)\mathrm{e}^{(-1-3i)t}$$

の $t \geq 0$ **におけるグラフを描こう．**

おしまい

物理数学☆演習 II 冬のプチテスト略解

樋口さぶろお[2] **配布**: 2007-11-29 Thu **更新**: 2007-12-20 08:37JST

1

1.
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,mg\sin\theta + \mu'|N| \cdot \frac{-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)}{\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right|},$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,mg\cos\theta + N.$$

2. **初期条件は**, $x(0)=0$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -v_0(<0)$. **よって, 下向きに動いている間の** x **軸方向の運動方程式は**
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\sin\theta + \mu'|N|$$
となる. **斜面から離れない条件** $z(t)=0$ **から** $N = mg\cos\theta > 0$. x **軸方向の運動方程式に代入して解くと**,
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\,g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)t + C_1.$$
$$x(t) = -\,\frac{1}{2}g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)t^2 + C_1\cdot t + C_2.$$
初期条件より, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = C_1 = -v_0$. $x(0) = C_2 = 0$. **よって**
$$x(t) = -\frac{1}{2}g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)t^2 - v_0 t.$$

3. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2v_0}{g}\right) < 0$ **であればよい**.
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2v_0}{g}\right) = -g(\sin\theta + 2\mu'\cos\theta)\cdot\frac{2v_0}{g} - v_0 < 0$$
を変形して
$$\mu' < \frac{\sin\theta + \frac{1}{2}}{\cos\theta}.$$

講評とコメント 3. **はわざと間接的な言い方をしたのですが, この時刻にぴったり止まると解釈してしまった人,** $<$ **か** $\leq$ **かで悩んだ人もいたようで申し訳ないです. 時刻** $t = \frac{2v_0}{g}$ **より後まで下向きに運動を続ける, と書けばよかったですね.**

解き方は 止まる時刻 $> \frac{2v_0}{g}$ **と** $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(\frac{2v_0}{g}) > 0$ **の両方がありえますが, もちろん同じ答になります.**

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(**講義のページもここからたどれます**), **へや**:1 **号館** 5 **階** 502.

2 (かなり略解)

1. 一般解は $x(t) = C_+ \mathrm{e}^{(-3+4i)t} + C_- \mathrm{e}^{(-3-4i)t}$. 初期条件より $C_\pm = \pm 3i$.
   よって, $x(t) = -6\mathrm{e}^{-3t}\sin(4t)$.
2. 一般解は $x(t) = C_+ \mathrm{e}^{4t} + C_- \mathrm{e}^{-t}$. 初期条件より $C_+ = 1, C_- = 4$.
   よって, $x(t) = \mathrm{e}^{4t} + 4\mathrm{e}^{-t}$.

講評とコメント $\mathrm{e}^{(-3+4i)t} = \mathrm{e}^{-3}\mathrm{e}^{4it}$ になっちゃう人を見かけました. 慣れの問題なんで練習しよう. 中学校で多項式の展開やり始めた頃に $-(a+b) = -a+b$ になっちゃうことってなかった?

3

1. $2\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -4x(t)$.
2. $x(0) = -2, \quad \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.
3. (略解) 特性方程式の根は $\lambda = \pm\sqrt{2}\,i$. 一般解は $x(t) = C_+ \mathrm{e}^{+\sqrt{2}\,it} + C_- \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\,it}$. 初期条件より $C_\pm = -1$.
   よって$x(t) = -2\cos(\sqrt{2}\,t)$.
4. 振幅 $A = |-2| = 2$, 周期 T は, $\sqrt{2}\,T = 2\pi$ より $T = \sqrt{2}\pi$, 振動数 $f = T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}$.
5. $|x(t)| = 2$ を解いて, $t = \frac{n\pi}{\sqrt{2}}$. $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

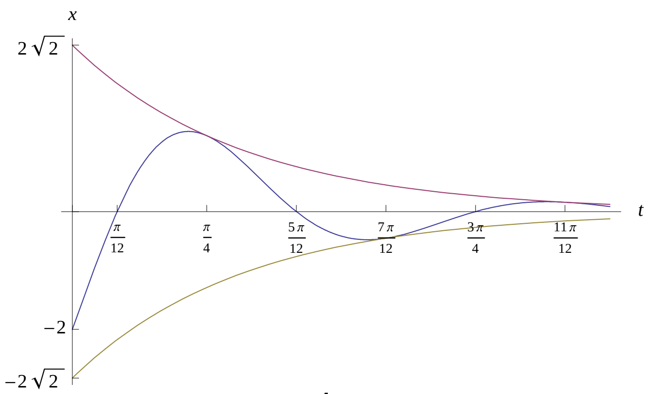
講評とコメント 4. で振幅は 4 や -2 ではありません. 単振動を等速円運動の x 成分とみなしたときの半径が振幅です.
5. で距離は絶対値で定義されるので, どちら方向に 2 離れていてもかまいません. また時刻は 1 つだけとは限りません.

4

オイラーの公式を用いて

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t}(-2\cos(3t) + 2\sin(3t)) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t}\cos(3t + \tfrac{5}{4}\pi)$$

三角関数の周期性から, $x(t) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t}\cos(3t - \frac{3}{4}\pi)$ でもある.
周期 $\frac{2}{3}\pi$, 振幅 $2\sqrt{2}$, $x(0) = -2$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 8$ などに注意して描くと次のようになる.



講評とコメント　$x(t)$ **そのものや漸近線が** t, x **軸と交わるところの座標の値書こうね**. t **軸の方は周期的なので**, **最初の** 2,3 **個でいいでしょう**.