物理数学☆演習 II ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] 配布: 2008-01-31 Thu 更新: 2008-02-11 11:28JST

ファイナルトライアル参加案内

外部記憶ペーパー作成10分＋答案作成80分です.

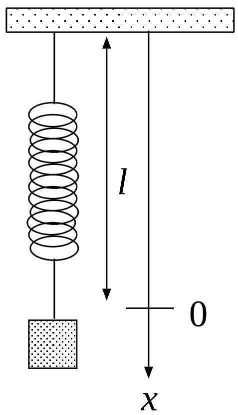
1. 解答用紙の指定された面に指定された問を解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

次の微分方程式を解こう. 積分定数は残ってよい (最終的な答には虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ が含まれないようにしよう).

1. $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 3t - 4.$
2. $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 3x(t) - 4.$
3. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -(3t-4) \times (3x(t) - 4).$

2



ばね (自然長 ℓ, ばね定数 k) を天井から鉛直方向につるす. ばねの一端を天井に固定し, もう一端に質量 m の物体をつなぐ. 物体はばねの力と重力 (重力加速度の大きさ g) をうけて鉛直方向に運動する. 鉛直下向きに x 軸の正の向きを取り, ばねの自然長の位置 (天井から ℓ だけ下の位置) を原点とする. 時刻 t における物体の位置を $x(t)$ とする.

1. 運動方程式を書こう (絶対値記号を含まない形で).
2. 力学的エネルギー保存則を書こう (それぞれの力の位置エネルギーの形は, 知っていれば導かないで使ってもよい)

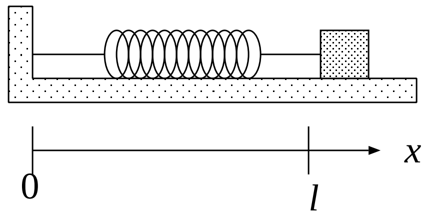
大注意: 上の問では, ファイナルトライアルシミュレーション問題とは違って, 運動方程式を解いて運動を求めたり, 力学的エネルギー保存則を利用して何か求めたりしなくてよいです.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3

床の上にばね (自然長 $\ell = 13$, ばね定数 $k = 5$) を水平におき, 一端を壁に固定し, もう一端に質量 $m = 1$ の物体をとりつける. 物体は, ばねの力と, 空気抵抗の力 (比例定数 $c = 2$) だけを受けて運動する.

壁の位置を原点とし, ばねの伸びる向きを正の向きとする x 座標をとる.



1. 運動方程式を書こう (絶対値記号を含まない形で).
2. 初期条件 $x(0) = 9, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 4$ のもとで運動方程式を解いて運動を求めよう (最終的な答には虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ が含まれないようにしよう).

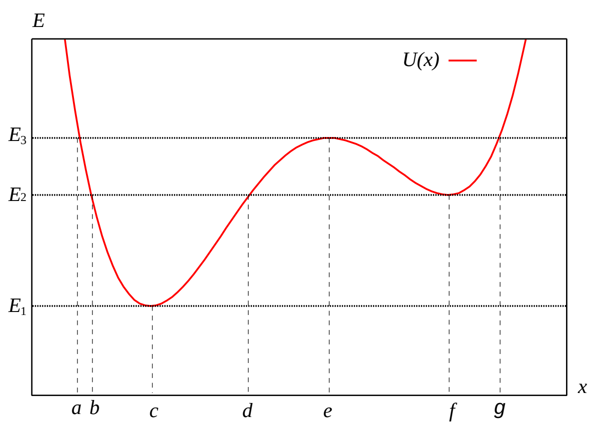
4

質量 $m = 1$ の物体が x 軸上を運動する. 物体は力 $F(x) = -2x + 6$ ~~($k > 0$ は定数)~~ のみを受ける. 時刻 t における物体の位置を $x(t)$ とする.

1. 力 $F(x)$ の位置エネルギー $U(x)$ を求めよう.
2. 時刻 $t = 0$ に, $x(0) = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ で物体は運動を始めた. 時刻 $t = t_1$ に, $x(t_1) = 4$ となった. この時刻 t_1 における物体の速さを t_1 を使わずに (実施後に追加) 表そう.
3. 2. で定めた (実施後に追加) 時刻 $t = 0$ から時刻 $t = t_1$ までに, 力が物体にした仕事 W を t_1 を使わずに (実施後に追加) 表そう.

5

質量 m の物体が, x 軸上を図のような位置エネルギー $U(x)$ を持つ保存力 $F(x)$ だけを受けて運動する.



1. 力学的エネルギー $E = E_2$ の持つ物体の運動を, 時刻 $t = 0$ における位置が $x(0) < e$ の場合, $x(0) > e$ の場合にわけて, 授業ののりで説明しよう.
2. エネルギー $E = E_3$ の物体が $x = a, c, d$ を通過した. このときの速度を v_a, v_c, v_d とする. 速さ $|v_a|, |v_c|, |v_d|$ を大きい順に並べよう.
3. 物体を $x = c$ から初速 v_0 で発射して, $x = f$ に到達させるためには, v_0 はどのような条件を満たせばよいか. 条件を m, E_1, E_2, E_3 で書こう.

物理数学☆演習 II ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2] **配布**: 2008-01-31 Thu **更新**: 2008-02-11 11:28JST

http://hig3.net

1

1. $v(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とおくと, 変数分離形となり,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)&=3t-4\\ \int \mathrm{d}v&=\int(3t-4)\,\mathrm{d}t\\ v(t)&=\frac{3}{2}t^2-4t+C_1\quad(C_1\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)&=\frac{3}{2}t^2-4t+C_1\\ \int \mathrm{d}x&=\int(\tfrac{3}{2}t^2-4t+C_1)\,\mathrm{d}t\\ x(t)&=\frac{1}{2}t^3-2t^2+C_1t+C_2\quad(C_1,C_2\text{ は任意定数})\end{aligned}$$

Remark 両辺を t で 2 回積分した, と思ってもよい.

2. $X(t)=x(t)-\frac{4}{3}$ とおくと,

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}(t)-3X(t)=0.$$

$X(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$ とおくと $\lambda=\pm\sqrt{3}$. 重ね合わせの定理より,

$$x(t)=X(t)+\frac{4}{3}=C_+\mathrm{e}^{+\sqrt{3}\,t}+C_-\mathrm{e}^{-\sqrt{3}\,t}+\frac{4}{3}.\quad(C_\pm\text{ は積分定数})$$

3. 変数分離形なので

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x-\frac{4}{3}}\mathrm{d}x&=-\int(3t-4)\cdot 3\,\mathrm{d}t\\ \log\left|x-\tfrac{4}{3}\right|&=-\tfrac{9}{2}t^2+12t+C_1\quad(C_1\text{ は積分定数})\\ x-\tfrac{4}{3}&=\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}t^2+12t+C_1}\\ x(t)&=\pm\,\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}t^2+12t}+\tfrac{4}{3}.\end{aligned}$$

$C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$ とおいて

$$x(t)=C\,\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}t^2+12t}+\frac{4}{3}\quad(C\text{ は任意定数})$$

---

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

講評とコメント　形に応じた解きかたをしよう. 2 **階微分** $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)$ **が入ってる場合**, $x(t)$ **がないなら** $v(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ **とおいてまず** $v(t)$ **を求める**. $x(t)$ **があるなら** $X(t)=x(t)-a$ **を使って** $X(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおける形にもっていく**.

2

1. **運動方程式は**,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=mg\times(+1)+k|x(t)|\times\frac{-x(t)}{|x(t)|}.$$

すなわち

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=+mg-k(x(t)).$$

2. **定数を無視すると**, **重力の位置エネルギーは** $-mgx$, **ばねの力の位置エネルギーは** $\frac{1}{2}kx^2$. **よって**, **力学的エネルギー保存則は**, **力学的エネルギーを** E **とすると**,

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2-mgx(t)+\frac{1}{2}k(x(t))^2=E.\quad \textbf{(定数)}$$

講評とコメント　運動方程式や保存則が何か把握しよう. **解いちゃってる人ともいました**.
　図と説明をよくチェックしよう. **自然長の位置が原点だから**, ℓ **を引く必要はない**. **外部記憶ペーパーを見ると**, **重力のあるときは** $x(t)-\ell$ **みたいな間違ったパターン化をして**, 2 **と** 3 **が逆になってる人もいました**.

3

1. **運動方程式は**

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=k\times|x(t)-\ell|\times\frac{-(x(t)-\ell)}{|x(t)-\ell|}+c\times\left|\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right|\times\frac{-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)}{\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right|}$$

すなわち,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=-k(x(t)-\ell)-c\times\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t).$$

または

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+2\times\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)+5(x(t)-13)=0.$$

2. $X(t) = x(t) - 13$ **とおくと**,

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2 \times \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t) + 5X(t) = 0.$$

$X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおいて (中略) 一般解は**, $C_\pm$ **を定数として**

$$x(t) = X(t) + 13 = C_+ \mathrm{e}^{(-1+2i)t} + C_- \mathrm{e}^{(-1-2i)t} + 13.$$

初期条件 $x(0) = 9, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 4$ **より** $C_+ = C_- = -2$. **オイラーの公式を用いて**, $x(t) = -4\mathrm{e}^{-t}\cos(2t) + 13$.

講評とコメント　初期条件は $x(t)$ **に対するもので**, $X(t) = x(t) - \ell$ **に使うには書き直しがいることに注意**.

4

1. **位置エネルギー** $U(x) = -\displaystyle\int_0^x (-2s+6)\ \mathrm{d}s = x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$.

Remark **定数** -9 **を無視すると**, **これは** $x = 3$ **を自然長の位置とするばね定数** $k = 2$ **のばねの位置エネルギーと思える**.

2. **時刻を** $t = 0, t_1$ **について力学的エネルギー保存則を書くと**, **力学的エネルギーを** E **として**,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot 0^2 + (1^2 - 6 \cdot 1) =& E, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_1)\right)^2 + (4^2 - 6 \cdot 4) =& E.\end{aligned}$$

定数 E **を消去して**, **速さは** $\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_1)\right| = \sqrt{2(-5+8)} = \sqrt{6}$.

3.

4. **仕事** $W = \displaystyle\int_1^4 (-2x+6)\ \mathrm{d}x = 3$.

Remark

1. 2. **は**, **運動方程式を解くことによっても求められる**. $x(t) = -2\cos(\sqrt{2}t) + 3$ **であり**, $t_1 = \frac{2}{3}\pi$.
2. 3. **は**, **位置エネルギーの減少分**, **または運動エネルギーの増加分としても求められる**.
3. 3. **は**, $\int_0^{t_1} F(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\ \mathrm{d}t$ **でできないこともないけど超たいへんでしょう**.

講評とコメント　せっかく 1. で正しい位置エネルギーを求めていながら, 2. で無関係な $-kx^2$ や mgx などを使ってる人もいました. なぜ?

2. は運動方程式を解くこともできるけど, エネルギー保存則を使ったほうが超らくな問題. 速さをきかれてるから答は絶対値.

3. $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} F(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\ \mathrm{d}t$ を使おうとした人が多かったのが意外. x で決まる力 $F(x)$ なら $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} F(x)\ \mathrm{d}x$ のほうが素直です. 変数 t の上下限には $0, t_1$ を変数 x の上下限には $x(0) = 1, x(t_1) = 4$ を使う必要があることに注意. 置換積分の基本でしょ.

5

力学的エネルギー保存則は $\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + U(x) = E$ (定数) である.

1. 物体は $U(x) \le E$ の範囲しか運動できないことに注意すると, $x(0) < e$ ならば $b \le x \le d$ の部分を往復運動し, $x(0) > e$ ならば $x = f$ に静止する.
2. $E_3 - U(x) = \frac{1}{2}m|v|^2$ なので, $U(x)$ が小さいほど速さ $|v|$ は大きい. よって $|v_c| > |v_d| > |v_a| = 0$.
3. $U(f) \le E$ は当然必要だが, 途中にある $x = e$ を, 小さくてもいいが 0 より大きい速度 $\epsilon > 0$ で通過する必要があるので,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_0^2 + U(c) =& E,\\ \frac{1}{m}\epsilon^2 + U(e) =& E \quad \text{すなわち} \quad U(e) < E.\end{aligned}$$

この 2 つの式から $\frac{1}{2}mv_0^2 > U(e) - U(c)$ なので $|v_0| > \sqrt{\frac{2}{m}(E_3 - E_1)}$

Remark なお, 左向き ($v_0 < 0$) で発射しても, やがて $x < a$ の部分で停止して右向きになるので, $v_0 > 0$ である必要はない.

Remark 等号が成立する場合 $|v_0| = \sqrt{\frac{2}{m}(E_3 - E_1)}$ には, 物体は $x = e$ で停止してしまい, $x > e$ には進めない.

講評とコメント　$U(x)$ から運動の様子を知る問題では, 心から理由を納得しましょう. どんなにパターン化して解答できそうな問題でも, 教員が裏をかいてくる可能性はつねにあります.