物理数学☆演習 II

樋口さぶろお[1] 配布: 2007-11-08 Thu 更新: Time-stamp: "2007-11-30 Fri 09:35 JST hig"

6 ばねの力と 2 階定数係数線形微分方程式の解法

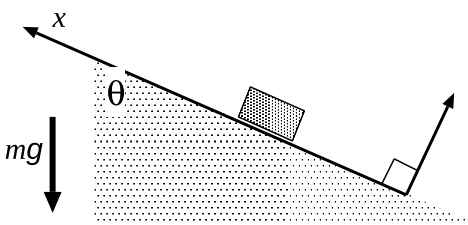
今日の目標

1. ばねの力の運動方程式を書けるようになろう.

6.1 斜面に沿う運動と動摩擦力の復習

6.1.1

動摩擦係数 μ' の粗い斜面上を質量 m の物体が運動する. x, y 座標を図のようにとる. 角度 $\theta > 0$ は (普通と異なり) 図のようにとる.



1. x, y 方向の運動方程式を立てよう.
2. 時刻 $t = 0$ に原点から物体を斜面の下向きに速さ v で打ち出したところ, しばらくして物体は静止した. その時刻を求めよう. このとき θ はある角度 θ_0 より大きいことがわかる. 角 θ_0 を求めよう.
3. $\theta = \theta_0$ のときはどのような運動になるか考えよう.

6.1.2

永田 例題 3.2(p.54)

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

6.2　ばねの力

説明

ばねの力 自然長の位置を原点としたのび (符号あり) を x とする.
大きさは $|x|$ に比例 (比例定数: ばね定数 $k > 0$)
向きはのびの向きと逆向き $\frac{-x}{|x|}$.
$F = k \cdot |x(t)| \cdot \frac{-x(t)}{|x(t)|} = -kx(t)$.

6.2.1

1. 質量 m の物体が水平な一直線上を運動する. 物体はばね定数 k のばねによって壁につながれている. 摩擦力と重力は考えない. 自然長の位置を原点として, ばねが縮む方向に x 軸の正の向きをとる. 運動方程式を書こう.
2. 上の問で, さらに速さの 1 乗に比例する空気抵抗の力 (比例定数 $c \geq 0$) があるとき, 運動方程式を書こう.

6.3　2 階線型微分方程式の解き方

説明

永田 p.83–84

$$p\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + q\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + rx(t) = 0$$

は, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ は後出しで決める定数) とおいて代入して解くと, 何個か解がみつかる.

重ね合わせの定理

$x_1(t), x_2(t)$ **がこの微分方程式の解であるとき**, $x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t)$ (A, B **は定数**) **も解. なぜなら**

$$\begin{aligned}
&p\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(Ax_1(t) + Bx_2(t)) + q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Ax_1(t) + Bx_2(t)) + r(Ax_1(t) + Bx_2(t)) \\
=&p\left(A\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}(t) + B\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2}(t)\right) + q\left(A\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(t) + B\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}(t)\right) + r\left(Ax_1(t) + Bx_2(t)\right) \\
=&A\left(p\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}(t) + q\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(t) + rx_1(t)\right) + B\left(p\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2}(t) + q\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}(t) + rx_2(t)\right) \\
=&A\cdot 0 + B\cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

n **階線形微分方程式の解は** n **個の解の重ね合わせで全部求まる (一般解)**

6.3.1

永田 5.2(p.82) **微分方程式**

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 5\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 4x(t) = 0.$$

を初期条件 $x(0) = 5, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -14$ **のもとで解こう**.

6.3.2

次の微分方程式をそれぞれの初期条件のもとで解こう.

1. $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 3x(t) = 0,\qquad x(0) = -2,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0.$
2. $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) - 2\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) - 8x(t) = 0,\qquad x(0) = 4,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -2.$

6.3.3

次の微分方程式を, それぞれの初期条件のもとで解こう.

1. $\displaystyle\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 0\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) - 9x(t) = 0,\qquad x(0) = 3, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -21.$
2. $\displaystyle\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 0\cdot x(t) = 0,\qquad x(0) = 2, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 6.$

6.3.4

質量 $m = 2$ **の物体が水平な一直線上を運動する. 物体はばね定数** $k = 6$ **のばねによって壁につながれており, また速さの** 1 **乗に比例する空気抵抗の力 (比例定数** $\beta = 8$**) を受ける. 摩擦力は考えない**.

時刻 $t = 0$ **に, ばねを** 2 **だけ押し縮めて, 静かに手を離した**.

自然長の位置を原点として, ばねが伸びる方向に x **軸の正の向きをとる**.

1. **運動方程式を書こう**.
2. **初期条件を書こう**.
3. **運動方程式を初期条件のもとで解いて運動を求めよう**.