# 物理数学☆演習 II

**樋口さぶろお**[1] **配布**: 2007-11-15 Thu **更新**: Time-stamp: "2007-11-30 Fri 09:35 JST hig"

## 7 オイラーの公式と単振動

**今日の目標**

1. **ばねの運動方程式を解けるようになろう**
2. **オイラーの公式を物理数学☆演習のりで使い慣れよう**.
3. **単振動にまつわる, 振幅, 周期, 振動数, 初期位相などの言葉の意味をわかろう**.

### 7.1 オイラーの公式の復習

**川薩四** 9.3(p.169)

**オイラーの公式**: **実数** $\theta$ **に対して** $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. $i = \sqrt{-1}$.
**オイラーの公式から導けること**: $\mathrm{e}^{-i\theta} = \mathrm{e}^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta = \overline{\mathrm{e}^{i\theta}}$ **(複素共役)**

#### 7.1.1

$\mathrm{e}^{\pi i}, \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\pi i}, \mathrm{e}^{-4\pi i}, \mathrm{e}^{\frac{2007}{6}\pi i}$ **を求めよう**.

### 7.2 ばねの運動方程式

**永田** 5.2(p.82)

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおくと** $\lambda$ **は複素数になるが恐れなくていい**. **初期条件を使って**, **最後にオイラーの公式で** $\sin, \cos$ **にもどすとちゃんと実数になる** (**ならなかったら計算ミス**)

#### 7.2.1

**微分方程式**

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 9x(t) = 0. \qquad x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 3. \tag{7.1}$$

**を**, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ ($\lambda$ **は一般には複素数**) **とおくことによって解こう**.


hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(**講義のページもここからたどれます**), **へや**:1 **号館** 5 **階** 502.

### 7.2.2

**微分方程式**

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+16x(t)=0, \qquad x(0)=\sqrt{3}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=4. \tag{7.2}$$

**を**, $x(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$ ($\lambda$ **は一般には複素数**) **とおくことによって解こう**.

### 7.2.3

**運動方程式** $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=-kx(t)$ ($m,k$ **は正の定数**) **を次の初期条件のもとで解こう**.

1. $x(0)=x_0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=0.$
2. $x(0)=0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=v_0.$
3. $x(0)=0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=0.$

## 7.3　ばねの運動と単振動

**永田** 4.4(p.71)

$$x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t=C_+\mathrm{e}^{i\omega t}+C_-\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

**は必ず次の形に書き直せる**.

$$x(t)=R\cos(\omega t+\theta_0), \qquad (R\geq 0)$$

**ここで次の記号**.

| 記号 | 単位 | 名前 | 意味 (単振動) | (等速円運動) |
|---|---|---|---|---|
| $R$ | [m] | 振幅/半径 | 原点からの最大距離 | 半径 |
| $\omega$ | [rad/s] | 角速度 | 単位時間あたりの位相の変化 | 単位時間あたりの位相の変化 |
| $\theta_0$ | [rad] | 初期位相 | 時刻 $t=0$ における位相 | 時刻 $t=0$ における位相 |
| $\omega t+\theta_0$ | [rad] | 位相 | $\cos$ の引数 | $x$ 軸からはかった角. |
| $T=\frac{2\pi}{\omega}$ | [s] | 周期 | もとの位置, 速度にもどるまでの時間 | 一周するまでの時間 |
| $f=\frac{1}{T}$ | [1/s] = [Hz] | 振動数 | 単位時間に何回振動するかという数 | 単位時間に何周するかという数 |

### 7.3.1

**質量** $m=2$ **の物体が, 床の上を, 壁にとりつけられたばねの力** (**ばね定数** $k=8$ ) **だけを受けて運動する**.

時刻 $t=0$ にばねを $3$ だけ押し縮めて，ばねがさらに縮む向きに速さ $6\sqrt{3}$ で物体を打ち出した．

自然長の位置を原点として，ばねが伸びる方向に $x$ 軸の正の向きをとって考えよう．

1. 運動方程式を書こう
2. 初期条件のもとで運動方程式を解いて物体の運動を求め (単振動になる)，横軸 $t$ 縦軸 $x$ でグラフを描こう．
3. 単振動の振幅，初期位相，角速度，周期，振動数を求めよう．
4. 時刻 $t \geq 0$ で初めてばねが伸びきる時刻を求めよう．

### 7.3.2

質量 $m=3$ の物体が，床の上を，壁にとりつけられたばねの力 (ばね定数 $k=9\pi^2$ ) だけを受けて運動する．

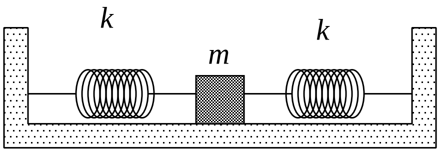
時刻 $t=0$ にばねを自然長より $6/\pi$ だけ縮めた位置から，ばねが伸びる向きに速さ $6\sqrt{3}$ で物体を打ち出した．

自然長の位置を原点として，ばねが伸びる方向に $x$ 軸の正の向きをとって考えよう．

1. 運動方程式を書こう
2. 初期条件のもとで運動方程式を解いて物体の運動を求め (単振動になる)，横軸 $t$ 縦軸 $x$ でグラフを描こう．
3. 単振動の振幅，角速度，周期，振動数を求めよう．
4. 時刻 $t>0$ で初めてばねが自然長に戻る時刻を求めよう．

### 7.3.3

図のように，質量 $m=3$ の物体がばね定数 $k=6$ のばね 2 個に，ばねが自然長の状態でつながれている．時刻 $t=0$ に右に $4$ だけ物体を移動して静かに手をはなした．自然長の位置から $2$ だけ離れた位置に来る時刻を全て求めよう．




### 7.3.4

永田 第 4 章演習問題 [9](p.76)

# お知らせ

## 冬のプチテストやります！

2007-11-29 木 2 講時です．科目の成績 100 点中 25 点分です．別紙の説明参照．

## 模範解答を作ろうプロジェクト!で最大 20 点ゲット!

物理数学☆演習 II の, 大学院入試の過去問や, プチテスト/ファイナルトライアルの準備に役立つ典型的な問題の模範解答を作ってみんなで共有するプロジェクトです. その貢献に対して 1 問あたり最大 10 点, 1 人あたり最大 20 点の加算があります.

ReLS https://r-els.media.ryukoku.ac.jp → 物理数学☆演習 II → 模範解答を作ろうプロジェクト!

に投稿されている問題に対して, (部分的でもいいから) 模範解答を紙に作成して, スキャンしたもの (後述) をフォーラムに返信してください.

最終的な完璧な答案を投稿した人よりも, 各難関ポイントを解決して貢献した人を評価して点数を決定します. また, 独立に作成した投稿でも, 同じ内容なら, 一番最初に投稿した人のみを評価します. 何人かの貢献で 1 問の最終的な答案が完成したら, 10 点がその人々に分配されます.

多くの人に参加のチャンスがあるように, 問題はときどき追加します. 追加のタイミングは, 原則として木曜日 19:30 ごろです. フォーラムの右側ブロックで, 'このフォーラムをメール購読する' を選択すると, 問題が公開されたときにメールで通知を受けることができます.

理工学部実習室 1-612 で紙に書かれた解答を簡単にスキャンして PDF ファイルや JPEG ファイルにして USB フラッシュメモリに保存できます. また, 自宅にスキャナがあればそれを使ってくれてもいいし, 3 号館地下第 2 セルフラーニング室や樋口の研究室 1-502 でも行えます.

http://hig3.net

スキャンの仕方の説明 http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/info/teaching/scanner.php

## ウィークリーフィードバック

今日の講義や演習はわかりやすかったか, どこがわかりにくかったか, どこがさらに詳しい説明を必要とするか, みなさんの評価を担当教員に伝えることができます.

hig3.net > 物理数学☆演習 II> ウィークリーフィードバック

匿名で携帯から簡単に回答できます. ご利用ください.

## 単振動の携帯アプリ

hig3.net > 物理数学☆演習 II > 等速円運動と単振動