物理数学☆演習 II

樋口さぶろお[1] **配布**: 2007-11-22 Thu **更新**: Time-stamp: "2007-11-30 Fri 09:35 JST hig"

8 単振動-減衰振動-過減衰

今日の目標 永田 5.2(p.82)

1. $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **の** λ **が** $\lambda = a + ib$ **となるときにも解がもとめられるようになろう**.
2. **減衰振動のグラフが描けるようになろう**.
3. **過減衰-減衰振動-単振動の違いをイメージできるようになろう**.
4. **音を立てずにドアが速く閉まるようにばねを調節できる**.

8.1 $\lambda = -\alpha \pm i\beta$ のとき

説明

永田 5.2(p.82) 2 **階定数係数線形微分方程式**

$$a\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + cx(t) = 0$$

で $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおいたら** $\lambda = -\alpha \pm i\beta$ **となったとき**, **解は** $x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}(C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t))$ **型になる**.

8.1.1

微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 20x(t) = 0, \qquad x(0) = 2, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 4$$

の解を求めよう.

8.1.2

微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 5\cdot x(t) = 0, \qquad x(0) = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -1.$$

の解を求めよう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(**講義のページもここからたどれます**), **へや**:1 **号館** 5 **階** 502.

8.1.3

微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)+5x(t)=0,\quad x(0)=2,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=-6$$

の解を求めよう.

8.2　減衰振動

説明

永田 5.2(p.82) $\lambda=-\alpha\pm i\beta$ **のときグラフを描くには**,

1. $x(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}(C_1\cos(\beta t)+C_2\sin(\beta t))=R\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta_0)$ **と書き直す**.
2. $x_1(t)=R\mathrm{e}^{-\alpha t}$, $x_2(t)=\cos(\beta t+\theta_0)$ **を別々に描く**.
3. $\pm x_1(t)$ **が'包絡線 (?)'になるように**, $x_2(t)$ **の'振幅を場所によって** $x_1(t)$ **に調節して'描く**

α **が大きいほど減衰は速い**. $1/\alpha$ **は'振幅'が** e^{-1} **倍になるのに要する時間 (半減期に似てる…) を表す**.
β **が大きいほど振動は速い**. $2\pi/\beta$ **は'周期'を表す**.
R **が大きいほど最初の振動は大きい**.

8.2.1

微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)+20x(t)=0,\qquad x(0)=2,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=4$$

の解 $x(t)$ **のグラフを描こう**

8.2.2

$x(t)=-\frac{3}{2}(\mathrm{e}^{(-2+4i)t}+\mathrm{e}^{(-2-4i)t})$ **の** $t\geq 0$ **でのグラフを描こう**.

8.3　特性方程式と解の分類

説明

永田 5.2(p.82)

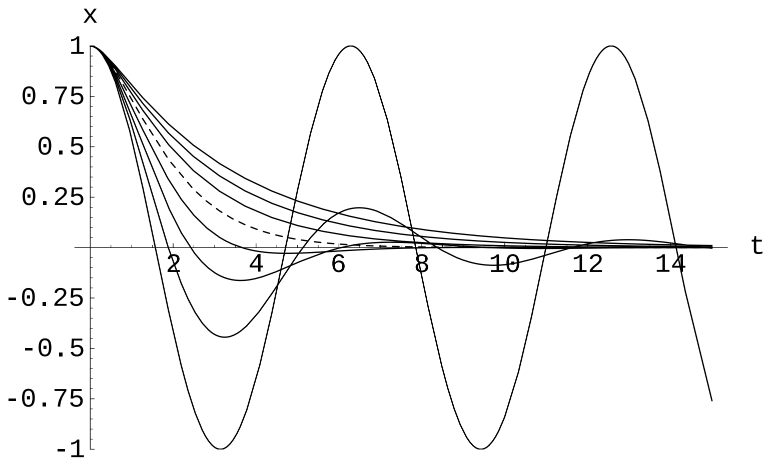
$$a \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + b \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + c \cdot x(t) = 0. \quad (a > 0, b, c \text{ は定数})$$

という微分方程式は, a, b, c の値に応じて異なるタイプの解を持つ.
$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて代入 $\rightsquigarrow$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

これは λ をきめる 2 次方程式で **特性方程式** という. 解 $x(t)$ の様子は, 判別式 $D = b^2 - 4ac$ の値によって異なる.

判別式	λ	解	型の名前
$D > 0$	2 実根 $-\alpha_1, -\alpha_2$	$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-\alpha_1 t} + C_2\mathrm{e}^{-\alpha_2 t}$	過減衰
$D = 0$	重根 $-\alpha \pm 0i$	来年数理モデル基礎 I で	臨界制動
$D < 0, b > 0$	2 複素共役根 $-\alpha \pm i\beta$	$x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$	減衰振動
$D < 0, b = 0$	純虚数根 $0 \pm i\beta$	$x(t) = C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)$	単振動



8.3.1

質量 $m = 4$ の物体が水平な一直線上を運動する. 物体はばね定数 $k = 36$ のばねによって壁につながれており, また速さの 1 乗に比例する空気抵抗の力 (比例定数 $c > 0$) を受ける. 物体の運動が減衰振動となるための c の条件を求めよう.

8.3.2

質量 $m = 1$ の物体が水平な一直線上を運動する. 物体はばね定数 $k = 13$ のばねによって壁につながれており, また速さの 1 乗に比例する空気抵抗の力 (比例定数 $\beta = 6$) を受ける. 時刻 $t = 0$ に, 自然長の位置から, ばねの縮む方向に, 速さ 4 で物体を打ち出した.

自然長の位置を原点として, ばねが伸びる方向に x 軸の正の向きをとる.

1. $t \geq 0$ での物体の運動 $x(t)$ を求めよう.
2. $t \geq 0$ での $x(t)$ のグラフを描こう
3. $t > 0$ でばねが初めて自然長に戻る時刻を求めよう.

8.3.3

質量 $m = 1$ の物体が水平な一直線上を運動する. 物体はばね定数 $k = 8$ のばねによって壁につながれており, また速さの 1 乗に比例する空気抵抗の力 (比例定数 $c = 6$) を受ける.

時刻 $t = 0$ に, ばねは 2 だけ伸びていて, 一瞬静止していたという.

自然長の位置を原点として, ばねが伸びる方向に x 軸の正の向きをとる.

1. (t が負の時間帯も含めた) 物体の運動を求め, グラフを描こう.
2. ばねが自然長だった時刻を求めよう.
3. 十分に大きい時刻 $t = T_0, T_1$ について考える. 時刻 $t = T_0$ で自然長からのずれは $L = |x(T_0)|$ だった. 自然長からのずれが $\frac{1}{2}L = |x(T_1)|$ となるような時刻 T_1 を近似的に求めよう.

お知らせ

冬のプチテストやります！

2007-11-29 木 2 講時です. 科目の成績 100 点中 25 点分です. 別紙の説明参照.

模範解答を作ろうプロジェクト!で最大 20 点ゲット!

物理数学☆演習 II の, 大学院入試の過去問や, プチテスト/ファイナルトライアルの準備に役立つ典型的な問題の模範解答を作ってみんなで共有するプロジェクトです. その貢献に対して 1 問あたり最大 10 点, 1 人あたり最大 20 点の加算があります.

ReLS `https://r-els.media.ryukoku.ac.jp` → 物理数学☆演習 II → 模範解答を作ろうプロジェクト!
に投稿されている問題に対して, (部分的でもいいから) 模範解答を紙に作成して, スキャンしたもの (後述) をフォーラムに返信してください.

理工学部実習室 1-612 で紙に書かれた解答を簡単にスキャンして PDF ファイルや JPEG ファイルにして USB フラッシュメモリに保存できます.

スキャンの仕方の説明 `http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/info/teaching/scanner.php`