

[目次](#) [前回](#) [次回](#) [今回の解答](#)

物理数学 演習 II

樋口さぶろお¹ 配布: 2008-01-10 Thu 更新: Time-stamp: "2008-01-10 Thu 14:10 JST hig"

13 仕事とファイナルトリアル対策

今日の目標

1. 力を受けて物体が移動したとき, 力が物体にした仕事を求められるようになる。
2. 仕事とエネルギーの関係を実感しよう。
3. ファイナルトリアルに備えよう。

13.1 仕事

説明

永田 6.1(p.96) ある力が物体 (や物体のシステム) にはたらいた状態で物体が移動したとき, その力が物体に **仕事** をした, という。

誰が (主語) 誰に (目的語) した仕事 をかを指定しないと意味がない (それによって値が決まる)

仕事の大きさ ΔW は, 力 F が一定で, r_0 から r_1 まで動かしたとき (**変位** $\Delta r = r_1 - r_0$ という), 内積

$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}.$$

1次元なら, 符号つきで

$$\Delta W = F \times \Delta x.$$

力 F が変化するなら, 積分になって,

$$W = \int_{x_0}^{x_1} F dx = \int_{t_0}^{t_1} F \frac{dx}{dt}(t) dt.$$

$$(\text{仕事の単位}) = (\text{力の単位}) \times (\text{長さの単位}) = \text{N} \cdot \text{m} = (\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2) \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = \text{J}.$$

これってエネルギーの単位と同じじゃん。

仕事率=単位時間あたりの仕事. 単位 J/s のことを W (ワット) という。

¹Copyright ©2007 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

13.1.1

1. 一定の力 $F = (0, 2, 3)$ がはたらいた状態で物体が $r_0 = (1, 3, 2)$ から $r_1 = (2, 8, 4)$ まで移動した. この力のした仕事は?
2. 一定の力 $F = 2$ がはたらいた状態で物体が $x = 0$ から $x = 2$ まで移動した. この力のした仕事は?
3. 一定の力 $F = -2$ がはたらいた状態で物体が $x = 0$ から $x = 2$ まで移動した. この力のした仕事は?
4. 力 $F(x) = -3x$ がはたらいた状態で物体が $x = 3$ から $x = 0$ まで移動した. この力が物体にした仕事は?

13.2 仕事とエネルギー

説明

永田 6.1(p.96) F が物体に仕事をするとき,

$$\text{仕事 } W = \int_{x_0}^{x_1} F \, dx = \int_{t_0}^{t_1} m \frac{d^2x}{dt^2}(t) \frac{dx}{dt}(t) \, dt = \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}(t) \right)^2 \right]_{t_0}^{t_1}.$$

つまり力がした仕事の量は運動エネルギーの増加分に等しい.

$F(x)$ が保存力で位置エネルギー $U(x)$ を持つとき,

$$\text{仕事 } W = \int_{x_0}^{x_1} F(x) \, dx = \int_0^{x_1} F(x) \, dx - \int_0^{x_0} F(x) \, dx = -U(x_1) + U(x_0)$$

すなわち, 仕事の量は位置エネルギーの減少分に等しい.

保存力に対しては, 力学的エネルギー保存則から, 物体の運動エネルギーの増加分と力の位置エネルギーの減少分とが等しくなっている.

仕事を する力の 位置エネルギー	$\overset{\text{仕事 } W}{\curvearrowright}$ +	仕事をされる物体の 運動エネルギー	=	力学的エネルギー (一定)
------------------------	---	----------------------	---	------------------

4月まで忘れておいていい説明

永田 6.1(p.96) 上では, 仕事をされるのは物体に限ったが, 力学 I 以降では, '物体とばね (や重力などの保存力) をあわせたシステム' を考える. '保存力をちょうど打ち消す力 + ほんのちょっと' という **外力** をこのシステムに加える. この外力がシステムにする仕事の分だけ, システムの力学的エネルギー (物体の運動エネルギーとばねの位置エネルギーの和) が増加する, のような考え方をする.

13.2.1

質量 m の物体に鉛直下向きに重力 mg がはたらいている。重力に引かれて、高さ h の塔の上から地面まで物体が落下した。

1. 重力のした仕事を求めよう。
2. 落下前後の重力の位置エネルギー、物体の運動エネルギー、力学的エネルギーの変化を求めよう。

13.2.2

質量 m の物体にばね定数 k のばねがとりつけられている。時刻 $t = 0$ に、自然長の位置にあって、速さ $v_0 > 0$ でばねののびる向きに進んでいた物体が、ばねの力に引かれて、しばらく後にのび $x_0 = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0 > 0$ で一瞬静止した。

1. この間にばねの力のした仕事を求めよう。
2. この間の重力の位置エネルギー、物体の運動エネルギー、力学的エネルギーの変化を求めよう。

13.2.3

粗い水平な面上で質量 m の物体がすべっている。物体には、重力(大きさ mg)、垂直抗力 (N)、動摩擦力(動摩擦係数 μ') がはたらいている。最初は速さ $v_0 > 0$ だった物体が、距離 $d = \frac{v_0^2}{2\mu' mg}$ だけ進んで静止した。

1. 重力、垂直抗力、動摩擦力がそれぞれ物体にした仕事を求めよう。
2. 止まるまでの重力の位置エネルギー、物体の運動エネルギー、力学的エネルギーの変化を求めよう。

13.2.4

永田 第 6 章演習問題 [4](p.112)

13.3 ファイナルトリアル対策

13.3.1 運動方程式で解くかそれともエネルギー保存則で解くか

(何の力も受けていないときの) 自然長が ℓ であるような、ばね定数 k の軽いばねを、床の上に鉛直方向に置き、その上に質量 m の物体を載せる。物体はばねの力と重力(重力加速度の大きさ g) をうける。垂直上向きに z 軸をとり、床を原点とする。時刻 $t = 0$ に、物体を手で $z = \ell - \frac{1}{2} \frac{mg}{k}$ の位置まで移動させ、静かに手をはなして運動させた。

1. (a) 物体の位置エネルギーを考えて、力学的エネルギー保存則を書こう。位置エネルギーのグラフを書いて、手をはなした後、物体は周期的に運動したことを確かめよう。

(b) 力学的エネルギー保存則を利用して、物体が到達するもっとも低い位置を求めよう。

(c) 力学的エネルギー保存則を利用して、物体が初めて位置 $z = \ell - \frac{3}{4} \frac{mg}{k}$ に到達したときの速度を求めよう。

2. (a) 初期条件のもとで物体の運動を運動方程式を解いて運動 $z(t)$ を求め、手をはなした後、物体は周期的に運動したことを確かめよう。

(b) 求めた $z(t)$ から、物体が到達するもっとも低い位置を求めよう。

(c) 求めた $z(t)$ から、物体が初めて位置 $z = \ell - \frac{3}{4} \frac{mg}{k}$ に到達したときの速度を求めよう。そのときの時刻を求めよう。

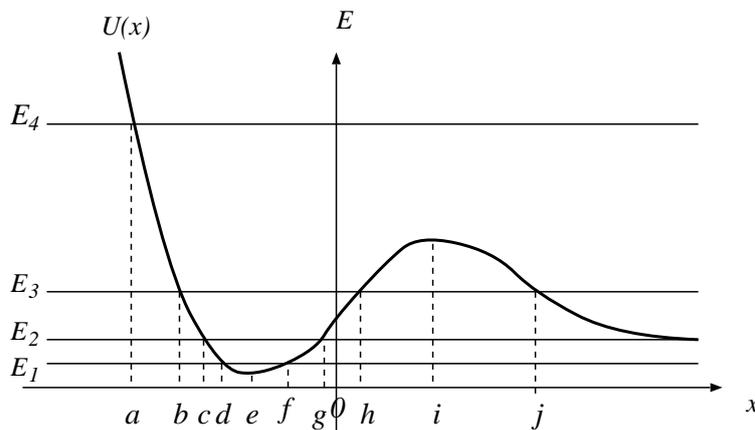
13.3.2 いろんな微分方程式:解き方総動員

次の微分方程式を解こう。積分定数は残ってよい。虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ は消そう。

1. $\frac{d^2x}{dt^2}(t) = 1 - 2t.$
2. $\frac{d^2x}{dt^2}(t) = 1 - 2x(t).$
3. $\frac{dx}{dt}(t) = (1 - 2x(t)) \times t.$

13.3.3 位置エネルギーと運動の様子

物体が、 x 軸上を図のポテンシャルエネルギーのもとで運動している。



1. 物体の力学的エネルギーが E_1 であるとき物体はどのように運動するか。授業でやったようなのりで説明しよう。
2. ある時刻に $x = b$ にある物体の力学的エネルギーが E_3 である。その後、物体はどのように運動するか。授業でやったようなのりで説明しよう。
3. ある時刻に $x = j$ にあり x の負の方向に進んでいる物体の力学的エネルギーが E_4 である。その後、物体はどのように運動するか。授業でやったようなのりで説明しよう。

お知らせ

ファイナルトリアル実施案内

外部記憶ペーパー使えます (ファイナルトリアル案内を参照してください)。次の 5(大) 問を出題します。() 内の数字はおよその予定配点です。

1. (30) 変数分離型, $\frac{d^2x}{dt^2}(t) = f(t)$ 型, $a\frac{d^2x}{dt^2}(t) + b\frac{dx}{dt}(t) + cx(t) = d$ 型の微分方程式が混ざって書いてあるときに, 正しい解法を選択して解く問題.
2. (20) 空気抵抗や重力やばねの力のうちのいくつかがある場合に運動方程式をたてたり, 解いたりして運動を求めたりする問題その 1
3. (15) 空気抵抗や重力やばねの力のうちのいくつかがある場合に運動方程式をたてたり, 解いたりして運動を求めたりする問題その 2
4. (20) 力が式で求まる場合に, 仕事を求めたり, エネルギー保存則を利用して物体の運動の情報を得たりする問題.
5. (15) 位置エネルギーのグラフだけが与えられたときに物体の運動の様子を説明する問題.

このように, 主な出題範囲は授業の後半ですが, 問題を解くためには, 当然, その前の部分の知識も必要になります (ばねの力と重力と両方ある場合って, 単振動わかってないとだめでしょ~)

これらを具体的に問題にしてみたシミュレーションを, 2008-01-17 ごろに, 模範解答を作ろうプロジェクト! に投稿します。上の計画に変更がある場合は, そのタイミングで明示します。

模範解答を作ろうプロジェクト! で最大 20 点ゲット!

物理数学 演習 II の, 大学院入試の過去問や, プチテスト/ファイナルトリアルの準備に役立つ典型的な問題の模範解答を作ってみんなで共有するプロジェクトです。その貢献に対して 1 問あたり最大 10 点, 1 人あたり最大 20 点の加算があります。

ReLS <https://r-els.media.ryukoku.ac.jp> → 物理数学 演習 II

→ 模範解答を作ろうプロジェクト!

に投稿されている問題に対して, (部分的でもいいから) 模範解答を紙に作成して, スキャンしたもの (後述) をフォーラムに返信してください。

理工学部実習室 1-612 で紙に書かれた解答を簡単にスキャンして PDF ファイルや JPEG ファイルにして USB フラッシュメモリに保存できます。

スキャンの仕方の説明 <http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/info/teaching/scanner.php>

