中心極限定理と区間推定

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I L10(2014-12-19 Fri)

今日の目標

- 大数の法則, 中心極限定理の内容を説明できる
- 標本から母平均値, 母分散を区間推定できる
  - 母分散既知
  - 母分散未知
    - 大標本
    - 小標本

http://hig3.net

L10-S1

Quiz 解答:推定

母平均値の推定値は, 標本平均値で与えられ,

$\overline{x} = \frac{1}{5}[10 + 20 + 30 + 30 + 110] = 40$(分)

母分散の推定値は, 標本 (不偏) 分散で与えられ,

$s^2 = \frac{1}{5-1}[(10-40)^2 + (20-40)^2 + (30-40)^2 + (30-40)^2 + (110-40)^2] = 1600$(分 ^{2})

母標準偏差の推定値は, (不偏) 標本分散の平方根で与えられ,

$s = \sqrt{1600} = 40$(分)

L10-S2

Quiz 解答:推定

これはサイズ 10 の標本.

標本平均値は

$$\frac{1}{10}[0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 10 + 10 + 30 + 100] = 15(\text{円})$$

. よって, 母平均値は 15 円と推定される.

(不偏) 標本分散は

$$\frac{1}{10-1}[(0-15)^2\times 6+(10-15)^2\times 2+(30-15)^2+(100-15)^2]=930.6(円^2)$$

. よって, 母分散は 930.6 円^2 と推定される.
母標準偏差は $\sqrt{930.6}=30.5$ 円と推定される.
L10-S3

Quiz 解答:母平均値, 母分散の点推定

1. 標本平均値は, $\frac{1}{6}(117+\cdots+112)=111\mathrm{g}$ なので, 母平均値は $111\mathrm{g}$ と推定できる.
2. 標本 (不偏) 分散は, $\frac{1}{6-1}[(117-111)^2+\cdots+(112-111)^2]=46\mathrm{g}^2$ なので, 母分散は $46\mathrm{g}^2$ と推定できる.

ここまで来たよ

母平均値の推定

$X_1, X_2, \dots, X_n i$ はサイズ n の標本.
各 X_i $(i = 1, \dots, n)$ は母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X_i]$, 母分散 σ^2 の独立同分布にしたがう確率変数.

標本平均値

$$\text{標本平均値 } \bar{X}_{(n)} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

が, 母平均値 μ の 'よい' 推定値になっている.

母平均値は μ はひとつに定まっているが, 標本平均値 $\bar{X}$ は確率変数であり, 試行=標本抽出のたびにかわる (それ自体が確率分布をもつ)

よい推定値って?

標本平均値の母期待値

$$\forall n \qquad \mathrm{E}[\bar{X}_{(n)}] = \mu$$

標本平均値 $\bar{X}_{(n)}$ の母期待値 $= X_i$ の母平均値

標本平均値 $\bar{X}_{(n)}$ は不偏性を持つという.

標本平均値のばらつきの幅は 0 に収束

$$V[\bar{X}_{(n)}] = \frac{\sigma^2}{n} \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

標本サイズが大きくなると, 標本平均値の分布の幅は小さくなる

大数の (弱) 法則

$$\forall \epsilon > 0 \quad P(|\bar{X}_{(n)} - \mu| > \epsilon|) \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

標本サイズ n が大きくなると, $\bar{X}_{(n)}$ と母平均値 μ が離れている確率は 0 に近づく.
確率が 1 に収束 確率収束

比較的簡単に証明できる
標本平均値 $\bar{X}_{(n)}$ は一致性を持つ という.

確率統計☆演習 II

点推定 対 区間推定

点推定

真の母平均値はわからないが，標本平均値を使って，

「母平均値は A 円と推定される」

それどのくらい正確なの? 実

は

区間推定

「母平均値が，B 円以上 C 円以下である '確率' は 0.95」

ここで '確率' というのは不誠実.

「母平均値の信頼係数 95% の信頼区間は B 円以上 C 円以下」

というのが正しい言葉遣い. 以下で意味と求め方.

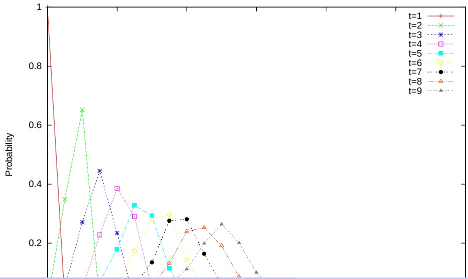
ここまで来たよ

中心極限定理

中心極限定理 (いいかげんバージョン)

$X_1, \ldots, X_n$ が, 母平均値 μ, 母分散 σ^2 の独立同分布に従うとする.
このとき, 確率変数 $Y_{(n)} = X_1 + \cdots + X_n = n\bar{X}$ の確率分布 (の累積分布関数) は, $n \to +\infty$ での $\boxed{}$ のそれに近づく.

$n \to +\infty$ での収束先に n がはいってる… いいかげんな表記法



中心極限定理

確率変数 $Z_{(n)} = \frac{\bar{X}_{(n)} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$ の確率分布 (の累積分布関数 $F_{(n)}$) は, $n \to +\infty$ で 標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ (の累積分布関数 Φ) に近づく.

$$F_{(n)}(z) \to \Phi(z). \qquad (n \to +\infty)$$

関数列が, ある関数に収束. 法則収束

$n \to +\infty$ で X_i の確率分布の個性が消えて, 正規分布にしたがう $\bar{X}_{(n)}$ になっちゃう.

ここまで来たよ

母平均値の区間推定 (母分散既知)

母平均値 μ, 母分散 σ^2 の母集団から, サイズ n の標本を何回も取り出して, 毎回, 標本平均値 $\bar{X}_{(n)}$ を計算する.

n が大きければ, $\frac{\bar{X}_{(n)}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$ は $\mathrm{N}(0,1^2)$ にしたがうので,

$$P\left(-1.96 < \frac{\bar{X}_{(n)}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} < +1.96\right) = 0.95.$$

$$P\left(\mu - 1.96 \times \sqrt{\sigma^2/n} < \bar{X}_{(n)} < \mu + 1.96 \times \sqrt{\sigma^2/n}\right) = 0.95.$$

μ について不等式を解くと,

$$P\left(\bar{X}_{(n)} - 1.96 \times \sqrt{\sigma^2/n} < \mu < \bar{X}_{(n)} + 1.96 \times \sqrt{\sigma^2/n}\right) = 0.95.$$

区間推定

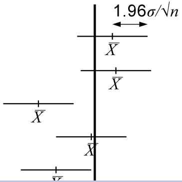
標本平均値 $\bar{X}_{(n)}$ として m が得られたとき, 母平均値 μ の,
信頼係数 95% の信頼区間は

$$m - 1.96 \times \sqrt{\sigma^2/n} < \mu < m + 1.96 \times \sqrt{\sigma^2/n}$$

信頼係数 99% の信頼区間は

$$m - 2.58 \times \sqrt{\sigma^2/n} < \mu < m + 2.58 \times \sqrt{\sigma^2/n}$$

$\boxed{}$ とき, μ がこの不等式を満たす (=信頼区間に含まれる確率) は 0.95 or 0.99.



Quiz(母平均値の区間推定 (母分散既知))

あるドーナツ製造マシンが次々に製造するドーナツの重さ X_ig は, 独立同分布にしたがう確率変数である. あらかじめ行った調査により, X_i の母分散は $\sigma^2 = 9\mathrm{g}^2$ であることがわかっている.
製造された 4 個のドーナツの重さを測定したところ, 次のようだった.
$51\mathrm{g}, 52\mathrm{g}, 47\mathrm{g}, 50\mathrm{g}.$

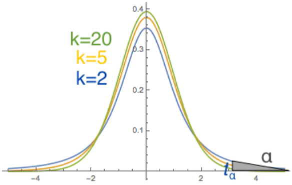
1. 母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X_i]$ を, 信頼係数 95%で区間推定しよう.
2. 母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X_i]$ を, 信頼係数 99%で区間推定しよう.

ここまで来たよ

母分散 σ^2 なんてわかんないんですけど?

σ^2 のかわりに不偏標本分散 s^2 (それ自身確率変数) を使っちゃいたい.
使っちゃうと, $T_{(n)} = \frac{\bar{X}_{(n)}-\mu}{\sqrt{s^2/n}}$ は, 正規分布 $\mathrm{N}(0,1^2)$ からちょっとずれた自由度 $n-1$ の Student の t-分布にしたがう.
t-分布は,

- 自由度 $k \to +\infty$ で $\mathrm{N}(0,1^2)$ に一致する.
- 自由度 k が小さいとき, $\mathrm{N}(0,1^2)$ より長く裾を引く.

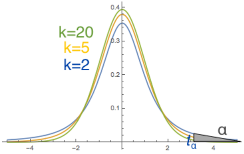


$k = 5, 50, \infty$

t-分布表

$\alpha = P(T > t_\alpha(k))$ となる, $t_\alpha(k)$ の値の表.

$k \backslash \alpha$	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.00025
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.710	31.820	63.660	127.300	318.300	636.600
2	0.816	1.080	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.090	22.330	31.600
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.210	12.920
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
$+\infty$	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291



ここまで来たよ

1. 略解:標本抽出と推定
2. 中心極限定理と区間推定
   - 点推定と大数の法則
   - 中心極限定理
   - 母平均値の区間推定
   - 母分散未知の場合:t-分布
   - 母平均値の区間推定 (母分散未知)

Quiz(母平均値の区間推定 (母分散未知))

あるドーナツ製造マシンが次々に製造するドーナツの重さ X_ig は, 独立同分布にしたがう確率変数である. ~~あらかじめ行った調査により, X_i の母分散は $\sigma^2 = 9\text{g}^2$ であることがわかっている.~~
製造された 4 個のドーナツの重さを測定したところ, 次のようだった.
$51\text{g}, 52\text{g}, 47\text{g}, 50\text{g}.$

1. 母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X_i]$ を, 信頼係数 95%で区間推定しよう.
2. 母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X_i]$ を, 信頼係数 99%で区間推定しよう.

母平均値の区間推定 (母分散未知, 大標本)

n が大きいとき, t 分布のかわりに $\mathrm{N}(0, 1^2)$ を使っちゃっても, そんなに誤差が多きわけではない. もともと有限の n で中心極限定理を使っちゃってるんだし.

物理実験

Quiz(母平均値の区間推定 (母分散未知, 大標本))

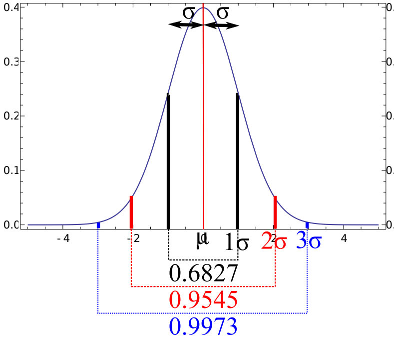
n が大きいとき, t 分布のかわりに $\mathrm{N}(0, 1^2)$ を使っちゃっても, そんなに誤差が多きわけではない. もともと有限の n で中心極限定理を使っちゃってるんだし.

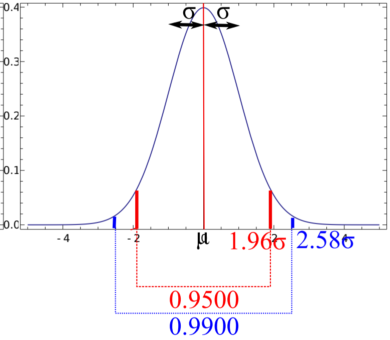
物理実験

あるドーナツ製造マシンが次々に製造するドーナツの重さ X_ig は, 独立同分布にしたがう確率変数である.
製造された 400 個のドーナツの重さを測定したところ, 次のようだった.
$51\mathrm{g}, 52\mathrm{g}, 47\mathrm{g}, \ldots, 50\mathrm{g}$.
ここから標本平均値, 不偏標本分散を計算したところ, $m = 51\mathrm{g}, s^2 = 4\mathrm{g}^2$ だった.

1. 母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X_i]$ を, 信頼係数 95%で区間推定しよう.

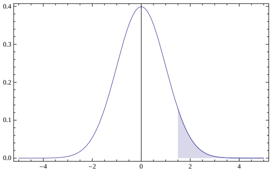
付録:正規分布 (ガウス分布) のグラフに関係した面積





付録:標準正規確率表 (上側確率=$Q(x) = 1 - \Phi(x)$)

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010



連絡

- 配布資料は 1-503 向かいの引出, `http://hig3.net` で再配布しています.
- Quiz の略解は授業終了後に `http://hig3.net` で配布しています.
- 2014-11-17 から チューターは月火水木昼 (1-614).
- **2014-12-25 木 4 補講** 第 1/2 セルフラーニング室で e ラーニングから各自受講. `http://hig3.net` → RaMMoodle → 確率統計. 動画視聴のため各自でイヤフォンを用意してください. ただし, この日時場所でなくても, 2015-01-08 木 までに, 例えば自宅などからでも受講すればよいです. 2015-01-09 金 2 の Quiz に反映します.
- 2015-01-09 金 09:00 までに予習問題.
- すみません冬休み中にプチテスト返却します.
- いつか補講もう 1 回