

χ^2 分布・母分散の区間推定・ χ^2 検定

樋口さぶろお

龍谷大学工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I L14(2015-01-17 Sat)

今日の目標

- 正規分布にしたがう確率変数の標本の不偏標本分散の確率分布が説明できる
- 標本から母分散を区間推定できる
- 母分散に関する χ^2 検定ができる



<http://hig3.net>

ここまで来たよ

- ① χ^2 分布・母分散の区間推定・ χ^2 検定
 - なぜ χ^2 分布
 - 母分散の区間推定
 - 母分散の検定

ばらつき (分散) のばらつきを考えたい

ポテトフライ S の重さのばらつきって? $\rightarrow \sqrt{\text{不偏標本分散}}$

- 母分散の点推定の精度って?
- 不偏標本分散ってどんな分布にしたがうの?

	の点推定	の区間推定
母平均値 μ	標本平均値 $\bar{X} = \frac{1}{n}[X_1 + \dots]$	$\bar{X} - \square\sqrt{\quad} < \mu < \bar{X} + \square\sqrt{\quad}$
母分散 σ^2	不偏標本分散 $S^2 = \frac{1}{n-1}[(X_1 - \bar{X})^2 + \dots]$	$? < \sigma^2 < ?$

X が $N(0, 1^2)$ にしたがうとき,

$$2X$$

$$X + 3$$

$$X^2$$

$$X_1^2 + X_2^2$$

\vdots

$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_k^2$$

χ^2 分布

χ^2 分布

X_1, \dots, X_k : 標準正規分布 $N(0, 1^2)$ に従う独立な確率変数とするとき、
 確率変数 $\chi^2 = X_1^2 + \dots + X_k^2$ とおく。

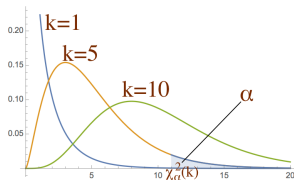
χ^2 は、自由度 k の χ^2 分布 $\chi^2(k)$ に従う。

きょう出てくる χ^2 はひとかたまりの (正の) 変数と思おう。

言語	小	大	読み
英語	x	X	エクス
ギリシャ語	χ	X	カイ

$\chi^2(k)$ の確率密度関数

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ C_k \times x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} & (x \geq 0) \end{cases}$$



Excel 2010 では `chisq.dist`, `chisq.inv`

ここまで来たよ

- ① χ^2 分布・母分散の区間推定・ χ^2 検定
 - なぜ χ^2 分布
 - 母分散の区間推定
 - 母分散の検定

不偏標本分散のしたがう分布

不偏標本分散のしたがう分布

確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとする. サイズ n の標本の不偏標本分散

$$S^2 = \frac{1}{n-1} ((X_1 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2)$$

を考えたとき,

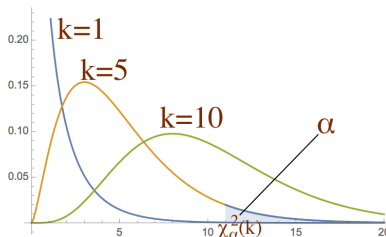
$$(n-1) \times \frac{S^2}{\sigma^2}$$

は自由度 $k = n - 1$ の χ^2 分布に従う.

証明略.

$-\mu$ でなく $-\bar{X}$ であるために自由度は $n-1$ になる.

母分散の区間推定



$\chi_{\alpha}^2(k)$ の定義 $\alpha = P(\chi^2 > \chi_{\alpha}^2(k))$.

$$P\left(\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) < (n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} < \chi_{\alpha/2}^2(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

σ^2 について解いて、標本の不偏標本分散が s^2 のとき、

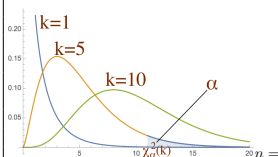
$$\text{信頼係数 } 1 - \alpha \text{ の信頼区間は } \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}$$

上の不等式が、確率 $1 - \alpha$ で成立.

χ^2 分布のグラフと数表

$$\alpha = P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha}(k)).$$

$k \backslash \alpha$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	.043927	.031571	.039821	.023932	.01579	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	.01003	.02010	.05064	.1026	.2107	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	.07172	.1148	.2158	.3518	.5844	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	.2070	.2971	.4844	.7107	1.064	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	.4117	.5543	.8312	1.145	1.610	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.6757	.8721	1.237	1.635	2.204	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.9893	1.239	1.690	2.167	2.833	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2



1, 5, 10

L14-Q1

Quiz(母分散の区間推定)

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは正規分布に従うという。

お店で9個のポテトフライ S サイズを買って重さを量ったところ、下のようだった (単位は g)。

78, 78, 78, 78, 80, 82, 82, 82, 82,

母平均値と母分散を区間推定しよう。

ここまで来たよ

- ① χ^2 分布・母分散の区間推定・ χ^2 検定
 - なぜ χ^2 分布
 - 母分散の区間推定
 - 母分散の検定

母分散の χ^2 検定 (母平均値未知)

母分散が σ_0^2 かどうか判定したい!

正規分布 $N(\mu, \sigma_1^2)$ にしたがう確率変数 X の, サイズ n の標本を考える.
 μ, σ_1 未知.

- 対立仮説 $\sigma_1 \neq \sigma_0$.
- 帰無仮説 $\sigma_1 = \sigma_0$.

不偏標本分散を S^2 としたとき,

$$P(\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) < (n-1) \frac{S^2}{\sigma_0^2} < \chi_{\alpha/2}^2(n-1)) = 1 - \alpha$$

この不等式の定める領域の**外側**が, 有意水準 α での棄却域.

L14-Q2

Quiz(母分散の検定)

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは、母分散 $\sigma_0^2 = 4\text{g}^2$ の分布であることが定められているという。

トレーニング中のアルバイトの人に、ポテトフライ S サイズを 9 個作ってもらったところ、重さは下のようだった (単位は g)。

76, 76, 76, 76, 80, 84, 84, 84, 84.

このアルバイトの作るポテトフライ S の重さの母分散 σ_1^2 は、 σ_0^2 と異なるか？ アルバイトのほうの重さが正規分布にしたがうと仮定し、有意水準 5% で、母分散の χ^2 検定で判定しよう。

Quiz 略解+コメント:母分散の検定 略解

- ① 有意水準 $\alpha = 0.05$ で,
- ② 母分散の χ^2 検定を行う.
- ③ 帰無仮説を, 「アルバイトの…重さの正規分布の母分散 σ_1^2 は, $\sigma_0^2 = 4$ に等しい」とする
- ④ サイズ n の標本の不偏標本分散を S^2 とすると, 量 $\chi^2 = (n - 1) \frac{s^2}{\sigma_0^2}$ は, 自由度 $n - 1$ の χ^2 分布に従う. この量を検定統計量として用いる.
- ⑤ この標本に対して $\chi^2 = (n - 1) \frac{s^2}{\sigma_0^2} = (9 - 1) \cdot \frac{16}{4} = 32$.
- ⑥ χ^2 分布表より, この値は, 棄却域 $\chi^2 < \chi_{1-\alpha/2}^2(n - 1) = 2.180$ or $\chi^2 > \chi_{\alpha/2}^2(n - 1) = 17.53$ に含まれるので帰無仮説を棄却する. 母分散が異なると (有意水準 0.05 で) 結論する.