確率統計☆演習 I ファイナルトライアル

樋口さぶろお [1] 配布: 2016-01-29 Fri 更新: Time-stamp: "2016-02-07 Sun 10:02 JST hig"

ファイナルトライアル参加案内

1. 外部記憶ペーパー作成 10 分, 答案作成 80 分
2. 指定された用紙に解答しよう.
3. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
4. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

(配点 10)
確率変数 X は次の確率密度関数 $f(x)$ に従う.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{16}x^2 & (-2 \leq x < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[2X+3]$ を求めよう.
2. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
3. 確率 $P(X^3 > 2)$ を求めよう.

2

(配点 10)
2 次元の離散型確率変数 (X, Y) の同時分布 f_{xy}^{XY} が下の表で与えられる.

$y \backslash x$	1	2
3	0	$\frac{3}{10}$
4	$\frac{7}{10}$	0

1. 母期待値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
2. 母期待値 $\mathrm{E}[XY]$ を求めよう.
3. 母共分散 C_{XY} を求めよう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

3

(配点 10)
確率変数 X の母期待値, 母分散は次を満たす.

$$\mathrm{V}[X] = 9, \quad \mathrm{E}[X] = 2.$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[-X^2 + 2X - 3]$ を求めよう.
2. 確率変数 $Y = -2X - 3$ の母分散 $\mathrm{V}[-2X - 3]$ を求めよう.

4

(配点 10)
確率変数 X は, 母平均値 $\mu = 2$, 母分散 $\sigma^2 = 4^2$ の正規分布 $\mathrm{N}(2, 4^2)$ にしたがう. $-3 < X < +3$ となる確率を, 必要なら数表を利用して求め, 小数で答えよう.

5

(配点 20) **過程不要**
あるエスプレッソメーカーの作る 1 杯分のエスプレッソの体積 X は, 未知の母平均値 $\mu \mathrm{cm}^3$ と母分散 $\sigma^2(\mathrm{cm}^3)^2$ の正規分布にしたがう確率変数である. $n = 3$ 杯いれてみたところ, 体積は,

$$28\mathrm{cm}^3, \quad 30\mathrm{cm}^3, \quad 32\mathrm{cm}^3$$

だった.

1. 母平均値 μ を, t 分布を用いて, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ で区間推定しよう.
2. 母分散 σ^2 を, カイ二乗分布を用いて, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$ で区間推定しよう.

加減乗除平方根の残った未整理な形で答えてよい.

6

(配点 10) **過程不要**
あるアイドルの音楽 CD には, 母比率 p に握手券がはいっているという $(0 < p < 1)$ 母比率 p を推定するために, 400 枚の CD を大人買いしてみたところ, 20 枚の CD だけに握手券がはいっていた.
母比率 p を信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ で区間推定しよう.
加減乗除平方根の残った未整理な形で答えてよい.

7

(配点 20) $\boxed{\textbf{過程不要}}$

ある動物の卵の重さ $X\mathrm{g}$ は, 確率変数とみなすことができ, 正規分布に従うことがわかっている. しかし, 母平均値 μ, 母分散 σ^2 はわからない.

卵 10 個からなる標本を抽出したところ, 標本平均値が $m\mathrm{g}$, 不偏標本分散が $S^2\mathrm{g}^2$ だった.

1. 従来の説によれば母平均値は $25\mathrm{g}$ である. 帰無仮説を, 「X の母平均値 μ は 25 に等しい」として t 検定を行う.
   t 分布にしたがう検定統計量 T を, m, S^2 の式 (両方使うとは限らない) で書こう.
2. 標本から上の T の値を計算したところ, $T = -3.00$ となったとする. 有意水準 $\alpha = 0.01$ での検定の結論を「不等式... が成立する/しないので, 帰無仮説を...」 の形で書こう.
3. 従来の説によれば母分散は $20^2\mathrm{g}^2$ である. 帰無仮説を, 「X の母分散 σ^2 は 20^2 に等しい」として, カイ二乗分布にしたがう検定統計量 $Y = \chi^2$ を, m, S^2 の式 (両方使うとは限らない) で書こう.
4. 標本から上の $Y = \chi^2$ の値を計算したところ, $Y = \chi^2 = 2.500$ となったとする. 有意水準 $\alpha = 0.05$ での検定の結論を「不等式... が成立する/しないので, 帰無仮説を...」の形で書こう.

8

(配点 10) $\boxed{\textbf{過程不要}}$

1

統計的仮説検定について, 次のうち**正しい文の番号を 1 つだけ**答えよう.

1. 帰無仮説と対立仮説は対偶の関係にある
2. 有意水準とは, 帰無仮説が正しくないのに棄却されない確率である
3. p 値が有意水準より小さいとき, 帰無仮説を棄却する
4. 検出力とは, 帰無仮説が正しいのに棄却される確率である.

2

次のうち**正しい文の番号を 1 つだけ**答えよう.

1. 統計的仮説検定を背理法による証明に例えたとき, 対立仮説は背理法の仮定に相当する
2. 統計的仮説検定の手続きでは, 検定統計量が極端な値にならなかったとき, 帰無仮説を棄却する
3. 統計的仮説検定を実行すると, 結果として有意水準が定まる
4. 統計的仮説検定で, 帰無仮説が棄却されたとき, 「有意である」「有意な差があった」などという

3

標本が与えられたときの母平均値の区間推定について, **正しい文の番号を 1 つだけ**答えよう.

1. 不偏標本分散が大きいほど, 信頼区間は小さく (短く) なる
2. 信頼係数が大きいほど, 信頼区間は小さく (短く) なる
3. 標本サイズが大きいほど, 信頼区間は小さく (短く) なる
4. 標本平均値が大きいほど, 信頼区間は小さく (短く) なる

4

標本抽出と推定について, **正しい文の番号を 1 つだけ**答えよう.

1. 母平均値は, 標本平均値の推定値である.
2. 不偏標本分散は, 母分散の推定値であり, 両者は必ずしも等しいわけではない
3. 母分布 (母集団) が与えられたとき, 一般に, 標本のサイズは定まっている
4. 標本平均値は, 母分布 (母集団) が同じなら, どの標本でも等しい

5

母集団から, サイズ n の標本を繰り返し抽出する. n は大きいとする. **中心極限定理の主張に最も近い文の番号を 1 つだけ**答えよう.

1. 母集団がどんな分布に従うときでも, 標本平均値の分布は, 近似的に, 正規分布である.
2. 母集団が正規分布に従うとき, 標本平均値の分布も, 近似的に, 正規分布である.
3. 母集団がどんな分布に従うときでも, 母平均値の分布は, 近似的に, 正規分布である.
4. 母集団が正規分布に従うとき, 母平均値の分布も, 近似的に, 正規分布である.

確率統計☆演習 I ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお [2]　配布: 2016-01-29 Fri 更新: Time-stamp: "2016-02-07 Sun 10:02 JST hig"

これは, 一部の過程のみ記した略解です. プチテストで, 受講者はすべての過程を記す必要があります.

1

1. $f(x)$ が偶関数なので, 奇関数の積分から $\mathrm{E}[X]=0$. $\mathrm{E}[2X+3]=2\mathrm{E}[X]+3=3$.
2. $\mathrm{V}[X]=\mathrm{E}[X^2]-\mathrm{E}[X]^2=\int_{-2}^{+2}x^2\cdot\frac{3}{16}x^2\,\mathrm{d}x-0=\frac{12}{5}$.
3. $\mathbf{1}_{[X^3>2]}(x)=\begin{cases}1 & (x>2^{1/3})\\ 0 & (\text{他})\end{cases}$ に注意すると,

$$P(X^3>2)=\mathrm{E}[\mathbf{1}_{[X^3>2]}(X)]=\int_{2^{1/3}}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{2^{1/3}}^{2}\frac{3}{16}x^2\,\mathrm{d}x=[\tfrac{1}{16}x^3]_{2^{1/3}}^{2}=\frac{3}{8}.$$

配点　1:3 点, 2:4 点, 3:3 点. 計 10 点.

講評　プチテストの再出題って言ったじゃん. これは確率統計☆演習 II, 計算科学☆実習 B の大前提となる知識. $\mathrm{E}[X]$ は奇関数の積分なのに, 正直に積分する人, 偶関数の積分と錯覚する人が多いのはなぜ?

2

1. $\mathrm{E}[X]=\frac{7}{12}\cdot 1+\frac{3}{10}\cdot 2=\frac{13}{10}$.
2. $\mathrm{E}[XY]=\frac{3}{10}\cdot 2\cdot 3+\frac{7}{10}\cdot 1\cdot 4=\frac{46}{10}$.
3. $\mathrm{E}[Y]=\frac{3}{10}\cdot 3+\frac{7}{10}\cdot 4=\frac{37}{10}$.
   $\mathrm{C_{XY}}=\mathrm{E}[XY]-\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]=\frac{46}{10}-\frac{13}{10}\cdot\frac{37}{10}=-\frac{21}{100}$.

配点　1:3 点, 2:3 点, 3:4 点. 計 10 点.

3

$\mathrm{E}[X^2]=\mathrm{V}[X]+\mathrm{E}[X]^2=13$.

1. $\mathrm{E}[-X^2+2X-3]=-\mathrm{E}[X^2]+2\mathrm{E}[X]-3\mathrm{E}[1]=-13+2\cdot 2-3\cdot 1=-12$.
2. $\mathrm{V}[-2X-3]=\mathrm{V}[-2X]=(-2)^2\mathrm{V}[X]=36$.

配点　1:3 点, 2:3 点, 3:4 点. 計 10 点.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

講評　$\mathrm{E}[X^2] = \mathrm{E}[X]^2 = 2^2$ ってしてる人は -50 点ぐらいしたいです．そういうのは $\mathrm{V}[X] = 0$ の時, つまり X が特定の値しかとらないような時にしか起きません.

4

$Z = \frac{X-2}{4}$ は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う．$P(-3 < X < +3) = P(-\frac{5}{4} < Z < \frac{1}{4}) = 1 - Q(\frac{1}{4}) - Q(\frac{5}{4}) = 1 - 0.4013 - 0.1056 = 0.4931.$

配点　Z の不等式に書き替えられてる:3 点, 確率が求まってる:7 点．計 10 点.

講評　正負大小によって求め方は違う．図を描いて考えよう.

5

標本サイズは $n = 3$．標本平均値は $\bar{X} = 30\mathrm{cm}^3$, 不偏標本分散は $S^2 = 4(\mathrm{cm}^3)^2$ である.

1. $\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}}$ は自由度 $n - 1 = 2$ の t 分布に従う．よって, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ の信頼区間は,

$$30 - 9.925 \times \sqrt{4/3} < \mu < 30 + 9.925 \times \sqrt{4/3}$$

2. $(n-1) \cdot \frac{S^2}{\sigma^2}$ は自由度 $n - 1$ のカイ二乗分布に従う．よって, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$ の信頼区間は,

$$(3-1) \cdot \frac{4}{7.378} < \sigma^2 < (3-1) \cdot \frac{4}{0.05064}$$

配点　母平均値の点推定を真ん中に $\pm$ の形:3 点, t 分布の表から決まる係数: 2 点+2 点, 平方根の中:3 点, 母分散の点推定を真ん中に $\times$ 大小の形:3 点, カイ二乗分布の表から決まる係数: 2 点+2 点, 分数:3 点．計 10 点.

講評　樋口の努力にもかかわらず, 記憶力または外部記憶ペーパーの準備だけで点数を得やすいところ.
1 では $\sqrt{\text{不偏標本分散/標本サイズ}}$ です．1. で σ^2 を使った答はおかしいですよ．t 分布は, 分母が不偏標本分散である量 T の従う分布だから．分母に母分散を使うなら正規分布になります．問題文に「未知の μ と σ」とはっきり書いておけばよかったですね

6

母比率 p は, $\frac{20}{400} = 0.05$ と推定できる.
母比率 p の信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ の信頼区間は,

$$0.05 - 2.58 \times \sqrt{\frac{0.05 \cdot 0.95}{400}} < p < 0.05 + 2.58 \times \sqrt{\frac{0.05 \cdot 0.95}{400}}.$$

配点　母比率の点推定を真ん中に $\pm$ の形:3 点, t 分布または正規分布の表から決まる係数: 2 点+2 点, 平方根の中:3 点. 計 10 点.

講評　ここは, 樋口の努力にもかかわらず, 記憶力または外部記憶ペーパーの準備だけで点数を得やすいところ.

7

1. $$T = \frac{m - 25}{\sqrt{S^2/10}}$$
2. $t_{0.01/2}(10-1) = 3.250 > 3.00 = |T|$ なので, 帰無仮説を棄却できない.
3. $$Y = (10-1)\frac{S^2}{20^2}$$
4. $\chi^2_{1-0.05/2}(10-1) = 2.700 > 2.500 = Y$ なので帰無仮説を棄却する.

配点　1,2,3,4:各 5 点, 計 20 点.

講評　公表した出題計画そのままの問ですが, 非参照 Quiz などでは通過していない設問形式なので混乱した人もいたでしょう. $\mu, \mu_0, \sigma, \sigma_0, n$ など, 問題文にない変数で答えてはいけません (自分で定義しないかぎり). どちらも, 棄却域は, ある範囲の外側です.

8

配点　1,2,3,4,5:各 2 点, 計 10 点.

1

3

講評　最多の誤答は 2. 有意水準は, 帰無仮説が正しいのに棄却される確率.

2

4

講評　最多の誤答は 1. 帰無仮説は背理法の仮定.

3

3

講評　最多の誤答は 2. 問 5.1 の正解見てみてよ.

4

2

講評　最多の誤答は 1.

5

1

講評　この問だけ,「正しい文を選べ」ではなかったので混乱した人もいたかも.
　最多の誤答は 2. 正しい主張ではあるけど, それは中心極限定理の主張じゃないでしょ. 次に多い誤答は 4. 母平均値はただ 1 個の数で, 分布というものはありません.