統計的仮説検定

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I　L12(2015-12-18 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2015-12-19 Sat 11:23 JST hig"

今日の目標

- 比率の区間推定ができる
- 統計的仮説検定とは何か説明できる
- データから母平均値の t 検定が実行できる

http://hig3.net

L11-Q1
Quiz 解答:母平均値の区間推定 (母分散既知)

1. 重さの標本平均値は $m = 50\text{g}$. よって, 信頼係数 0.95 信頼区間は
$$50 - 1.96 \times \sqrt{\frac{9}{4}} < \mu < 50 + 1.96 \times \sqrt{\frac{9}{4}}.$$
すなわち, $47.06 < \mu < 52.94$.
2. 同様に,
$$50 - 2.58 \times \sqrt{\frac{9}{4}} < \mu < 50 + 2.58 \times \sqrt{\frac{9}{4}}.$$
すなわち, $46.13 < \mu < 53.87$.

L11-Q2
Quiz 解答:母平均値の区間推定 (母分散未知)

1. 重さの標本平均値は $m = 50\mathrm{g}$. 不偏標本分散は $s^2 = \frac{1}{4-1} \cdot 14$. 自由度 $k = n - 1 = 3$ の t 分布表を参照して，信頼係数 0.95 の信頼区間は

$$50 - 3.182 \times \sqrt{\frac{1}{4}\frac{14}{3}} < \mu < 50 + 3.182 \times \sqrt{\frac{1}{4}\frac{14}{3}}.$$

2. 同様に，

$$50 - 5.841 \times \sqrt{\frac{1}{4}\frac{14}{3}} < \mu < 50 + 5.841 \times \sqrt{\frac{1}{4}\frac{14}{3}}.$$

L11-Q3

Quiz 解答:母平均値の区間推定 (母分散未知, 大標本)

1. 大標本なので，t 分布の自由度 ∞ の場合，すなわち標準正規分布で考えてよい．信頼係数 0.95 信頼区間は

$$51 - 1.96 \times \sqrt{\frac{4}{400}} < \mu < 51 + 1.96 \times \sqrt{\frac{4}{400}}.$$

2. 同様に,

$$51 - 2.58 \times \sqrt{\frac{4}{400}} < \mu < 51 + 2.58 \times \sqrt{\frac{4}{400}}.$$

ここまで来たよ

3. 母平均値と母比率の区間推定

4. 統計的仮説検定
   - 母比率の区間推定
   - 統計的仮説検定の考え方
   - 正規分布にしたがう母集団の母平均値に関する t 検定

母比率の区間推定

「…である」のダミー変数 Y

$$f_y = \begin{cases} p & (y = 1, \text{…である}) \\ 1 - p & (y = 0, \text{…である以外}) \end{cases}$$

$\mathrm{E}[Y] = p = \text{母比率}, \mathrm{V}[Y] = p(1-p)$.
標本比率 $\hat{p} = \dfrac{\text{…であるデータの個数}}{\text{標本サイズ}}$ から, $\hat{p}(1-\hat{p})$ が母分散であるかのようにして, 標準正規分布の場合の区間推定の式を使う.

母比率の区間推定

母比率の信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$ の信頼区間は

$$\hat{p} - 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1-\hat{p})} < p < \hat{p} + 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1-\hat{p})}$$

母比率の信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ の信頼区間は

$$\hat{p} - 2.58 \times \sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1-\hat{p})} < p < \hat{p} + 2.58 \times \sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1-\hat{p})}$$

導出 (母比率の区間推定)

Y の標本平均値 $\hat{p}$ は, n が大きいとき, 中心極限定理から, 母平均値 p, 母分散 $\frac{1}{n}p(1-p)$ の正規分布にしたがう. よって,

$$p - 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{n}p(1-p)} < \hat{p} < p + 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{n}p(1-p)}$$

である確率は $1-\alpha = 0.95$. この不等式を, p の範囲に書き替えたい

3 つの証明方針

とても小さい標本 中心極限定理はやめて, 2 項分布と思って扱え

小標本 p についての 2 次方程式を解け

大標本 p と $\hat{p}$ はかなり近いはず. 最左右辺の $p(1-p)$ は $\hat{p}(1-\hat{p})$ に置きかえちゃっていい.

$$\hat{p} - 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1-\hat{p})} < p < \hat{p} + 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1-\hat{p})}.$$

L12-Q1

Quiz(母比率の区間推定)

選挙で出口調査をしたところ, 50 人中 35 人が A 候補に投票したと答えた. 母比率, すなわち有権者全体での A 候補の得票率を考える.

1. A 候補の得票率を, (点) 推定しよう
2. A 候補の得票率を, 信頼係数 $1-\alpha=0.95$ で区間推定しよう.
3. A 候補の得票率を, 信頼係数 $1-\alpha=0.99$ で区間推定しよう.

注: 下限, 上限が 0,1 を越えるときは, 0,1 に直してしまっていい.

ここまで来たよ

3. 母平均値と母比率の区間推定

4. 統計的仮説検定
   - 母比率の区間推定
   - 統計的仮説検定の考え方
   - 正規分布にしたがう母集団の母平均値に関する t 検定

推定と検定

点推定 μ は値 xxx と推定する

区間推定 μ は値 xxx と値 yyy の間と推定する (信頼係数 $1-\alpha=0.95$ で)

検定 μ は値 xxx と $\boxed{}$ する (有意水準 α で) or あるかどうかわからないと言う

あるドーナツ製造器は, 重さ X(確率変数) の母平均値が 55g であるように調整済みだという. しかし, 5 個買ってみたら, みんな軽めな感じ. これ, 本当に母平均値 55 g なの?(っていうか 55 g でないと言いたい).

ある学習法を使ってるある生徒の, 毎日のテストでの 1 か月の平均点は 63 点. 自分が別の学習法で教えた 5 日間の平均点は $\cdots$. 自分の方法は優れていると言いたい.

なぜ統計的仮説検定?

心理学, 教育学, 社会科学などでは標本サイズが大きくできないことが多い. 標本サイズが小さくても Yes/No のいちおうの結論を出す, 科学業界で合意された方法が
検定 (test)=統計的仮説検定 (statistical hypothesis test)

真の母平均値は 55g と異なる, を $\boxed{\text{証明}}$ したい
しか〜し, $\neq$ の証明はやりにくい 54g である, ことが証明できれば十分だけど, 有限サイズの標本からはとうてい無理.

こういうときの常套手段は $\boxed{\phantom{\text{背理法}}}$. 否定の命題「55g である」を仮定して $\boxed{\text{矛盾}}$ を導く.
注意
以下, $\boxed{\text{証明}}$, $\boxed{\text{矛盾}}$ は, 証明みたいなもの, 矛盾みたいなもの (統計的な, $\alpha = 0.05$ の確率で間違っている), です. この回の授業のローカル用語.
α: 有意水準. どれだけの誤りを許すか. 大きいほど頼りない $\boxed{\text{証明}}$. ふつうは 0.01 or 0.05.

帰無仮説と対立仮説

- H_0:帰無仮説 (null hypothesis) = 背理法の仮定 = 「真の母平均値 μ は $\mu_0 = 55\mathrm{g}$ に等しい」
- H_1:対立仮説 (alternative hypothesis) = 示したい命題 = 「真の母平均値 μ は $\mu_0 = 55\mathrm{g}$ でない」

上のは両側検定.
対立仮説が H_1: $\mu > \mu_0$ という形の 片側検定 もある

ここでいう $\boxed{\text{矛盾}}$ とは

$\boxed{\text{矛盾}}$

$\Leftrightarrow$ めったにない (確率 α 以下の) 事象が起きてしまった標本である
$\Leftrightarrow$ 検定統計量 Y が, 標本で, (確率 α 以下でしか起きない) 極端に大きな/小さな値をとった

例え話による$\boxed{\text{矛盾}}$の説明

統計的仮説検定

- いかさまコインを 4 回投げたところ, すべて表だった. このコインは公平 (表が出る確率 $\frac{1}{2}$) と仮定すると矛盾するか? 有意水準を $\alpha = 0.05$ とする.
- いかさまコインを 6 回投げたところ, すべて表だった. このコインは公平 (表が出る確率 $\frac{1}{2}$) と仮定すると矛盾するか? 有意水準を $\alpha = 0.05$ とする.

棄却・採択・有意

H_0 のもとで, ある量 (検定統計量) のとる範囲を考え, 標本と比較して $\boxed{\text{矛盾}}$ が導かれるとき,

- H_0 を棄却 (reject) する
- H_1 が採択 (accept) される
- μ と μ_0 の差が有意である (significant)

などという. H_1 が $\boxed{\text{証明}}$ されたということ.

$\boxed{\text{矛盾}}$ が導けなかったとき,

- H_0 を棄却できない
- H_0 を採用 (accept) する
- μ と μ_0 の差が有意でない (not significant)

などという. H_0 が $\boxed{\text{証明}}$ できたわけではない

答案や論文での検定の書き方

1. 「有意水準 $\alpha = \cdots$ で」
2. 「…検定を行う」(3,4 を名前で予告する)
3. 「帰無仮説を…とする」
4. 「帰無仮説のもとで検定統計量 Y は …分布にしたがう」
5. 「標本に対して検定統計量 $y_1 = \cdots$ である」
6. Y が y_1 より極端な値となる確率 p と α の大小を考える．「p は α 以上なので/未満なので 帰無仮説を採択する/棄却する (=有意でない/有意である)」

検定統計量 Y この場合はこういう Y を取るとよい，というマニュアルができている．取り方についた名前が「…検定」．たまにもっといいのを見つける人もいる．
最初のうちは，参考書を見て，この状況ではこの検定統計量の…検定，という解法パターン的対処でいいでしょう．不適切な検定を無理に使わないようにしよう．

ここまで来たよ

3 母平均値と母比率の区間推定

4 統計的仮説検定

- 母比率の区間推定
- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値に関する t 検定

正規分布にしたがう母集団の母平均値に関する t 検定 I

L12-Q2

Quiz(母平均値の検定 (母分散未知)=t 検定)

あるドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ $X_i\mathrm{g}$ は, 正規分布にしたがうことがわかっている. 母平均値は $57\mathrm{g}$ だと思っていたが, きょう 5 個製造したところ, 下のようだった.

$52\mathrm{g}, 52\mathrm{g}, 53\mathrm{g}, 48\mathrm{g}, 50\mathrm{g}.$

本当にドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ $X_i\mathrm{g}$ の母平均値は $57\mathrm{g}$ なのだろうか. 有意水準 $\alpha = 0.05$ で統計的検定を行って判定しよう.

L12-Q3

Quiz(正規分布の母平均値に関する t 検定)

あるコンビニには, 9:00–10:00 に平均 196 人の客が来店することがわかっている. ドーナツ販売開始後の 4 日間, 来店客数は次の通りだった.
$204, 208, 188, 200$
来店者数は正規分布にしたがうと考える. ドーナツ販売開始後に来店客数は変化したか? 有意水準を 0.05 とする.

連絡

- **t 検定のレポート (個人別課題)**. RaMMoodle https://el.math.ryukoku.ac.jp/moodle/ のコースからダウンロードできます. 2016-01-08 金 2 の授業, または, 2016-01-14 木昼までの Math ラウンジで提出.
- Math ラウンジの配布資料訂正. 正しくは, 2015-12-23 水:授業なし, 2015-12-24 木:土曜授業.
- オフィスアワー月 4 木 6(1-502)

manaba / 出席カード
https://manaba.ryukoku.ac.jp