離散型確率変数

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I L05(2016-10-20 Thu)

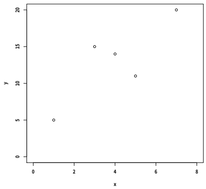
最終更新: Time-stamp: "2016-10-27 Thu 19:05 JST hig"

今日の目標

- 塚田確率統計 §2.1,§2.2,§3.1,§3.2 高校 数学 A 高校 数学 B
- 離散型確率変数の確率, 母平均値, 母分散, 母期待値が計算できる

http://hig3.net

L04-Q1 Quiz 解答:クロス集計表



$y \backslash x$	0 以上 2 未満	2 以上 4 未満	4 以上 6 未満	6 以上 8 未満	計
0 以上 5 未満					1
5 以上 10 未満	1				1
10 以上 15 未満		1	1		2
15 以上 20 未満		1			1
20 以上 25 未満				1	1
計	1	2	1	1	5

L04-Q4 Quiz 解答:共分散 $\overline{x} = 4,\ s_x^2 = 4,\ s_x = 2.$
$\overline{y} = 13,\ s_x^2 = 122/5 = 24.4,\ s_y = \sqrt{122/5} = 4.94.$
共分散 $s_{xy} = \frac{1}{5}[(1-4)(5-13) + (3-4)(15-13) + (4-4)(14-13) + (5-4)(11-13) + (7-4)(20-13)] = 41/5 = 8.2.$
相関係数 $r = \frac{41/5}{2 \cdot \sqrt{122/5}} = 0.83.$
以上より, $y - 13 = \frac{0.83 \cdot 4.94}{2}(x-4).$
L04-Q5
Quiz 解答:共分散と相関係数
共分散 $s_{xy} = 10$
相関係数 $r = \frac{10}{\sqrt{6}\sqrt{18}} = \frac{5}{3\sqrt{3}}.$
回帰係数 $a = \frac{5}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} = \frac{5}{3}.$
よって回帰直線の式は, $y = \frac{5}{3}(x-4) + 9.$

高校数学でありがちな設定

コインを 1 回投げる

結果	確率
表	$\frac{1}{2}$
裏	$\frac{1}{2}$
計	1

前回までの話 (記述統計) との関係.
{ 表, 裏 } = { 高橋みなみ, 渡辺麻友, ⋯ } ではない. とりあえず無関係な別の話だと思って.

アイドル作成ゲームで, $\boxed{\text{新しいメンバーをスカウトする}}$ ボタンを押したら, CPU 内部でサイコロが振られて (=確率) 身長体重が決まって⋯を 77 回繰りかえしたら, 77 個からなる 2 変量データができた, みたいな関係. 推測統計まで行ったときに明らかになります.

事象と標本空間 塚田確率統計 §2.1,§2.2 高校 数学 A

試行 (トランプから 1 枚引く) を行うと根源事象 ($\heartsuit 1$ がでる) のどれか 1 つが起きる.

標本空間 $\Omega = \{\heartsuit 1, \dots, \spadesuit K\}$ すべての根源事象を集めた集合.

事象 部分集合

$A = \{$ カード 1, カード 2, $\dots\} = \{$ カード $x|$ 条件 $a(x)\} \subset \omega$

全事象 $\Omega \subset \Omega$.

空事象 $\emptyset \subset \Omega$

補事象 $A^{\mathrm{c}} = \Omega \setminus A$. A が起きなかったという事象.

和事象 $A \cup B$ または,

積事象 $A \cap B$ かつ,

排反事象 「A, B が排反事象」 $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$. 同時に起きない

事象の確率

「事象 A の確率」 $=P(A) =$ 「条件 $a(X)$ が成立する確率」$=P(a(X))$

$\Omega =$(トランプ全体) のとき,

- $P(\{\heartsuit 1, \ldots, \heartsuit K\}) = P(X$ が$\heartsuit) = (\heartsuit$がでる確率$)$
- $P(\{\heartsuit 1\}) = P(X$ が$\heartsuit 1) = (\heartsuit 1$ がでる確率$)$
- $P(\{\clubsuit 1, \ldots, \clubsuit K, \spadesuit 1, \ldots, \spadesuit K\}) = P(X$ が黒札$) =$ $(X$ 黒札がでる確率$)$

ここではやらないこと

- 確率の公理 塚田確率統計 p.49
- 確率に関する基本的定理 塚田確率統計定理 2.2.1
- 塚田確率統計 2.3 塚田確率統計 2.5 は 確率統計☆演習 II(2016)L? まで延期
- 塚田確率統計 2.4 は 確率統計☆演習 I(2016)L8 まで延期
- 塚田確率統計 2.6 問 1–7 高校 数学 A 各自やってみて

ここまで来たよ

1. 2 変量データの共分散・相関係数・回帰分析
2. 離散型確率変数
   - 離散的確率変数
   - 母期待値・母平均値・母分散・母標準偏差

離散的確率変数 塚田確率統計 3.2

高校数学でありがちな問題

袋に赤玉 2 個, 白玉 3 個がはいっている. いちどに 3 個取り出したとき, 赤玉が x 個である確率は ?

X が確率変数.
X は離散型確率変数 離散型 $\approx$ 整数値
易しく言ったら, $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$. この元が X.
厳密な流儀で言うと, 確率変数とは, 事象を数に対応させる関数.
例:カード $\mapsto$ カードのマークの数

x	確率 $f(x)$
$\vdots$	0
-1	0
0	$\frac{1}{10} = 1/{}_5\mathrm{C}_3$
1	$\frac{6}{10} = 2 \cdot 3/{}_5\mathrm{C}_3$
2	$\frac{3}{10} = 1 \cdot 3/{}_5\mathrm{C}_3$
3	0
$\vdots$	0
計	1

言葉

確率分布 (確率関数)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & (x = 0) \\ \frac{6}{10} & (x = 1) \\ \frac{3}{10} & (x = 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

確率分布の性質 $0 \le f(x) \le 1$. $\sum_x f(x) = 1$.

ちょっと 塚田確率統計 と記号がずれてます.
ここの $f(2)$ は 塚田確率統計 p.61,p.62 では $P(X = 2)$ や p_2 と書いてます.

ここまで来たよ

1. 2 変量データの共分散・相関係数・回帰分析
2. 離散型確率変数
   - 離散的確率変数
   - 母期待値・母平均値・母分散・母標準偏差

関数 $\phi(x)$ の母期待値

塚田確率統計 p.62,63 高校 数学 AB

関数 $\phi(x)$ の母期待値 $\mathrm{E}[\phi(X)]$

離散型確率変数 X が確率分布 $f(x) = \cdots$ に従うとき,

$$\mathrm{E}[\phi(X)] = \sum_x f(x) \times \phi(x)$$

ϕ は普通の関数. 例: $\phi(x) = x^2, \mathrm{e}^x$, (場合分けで書かれた関数), ...

性質

$\mathrm{E}[1] = 1$. ($\phi(x) = 1$ と $\sum_x f(x) = 1$ から)

特に名前のついた量

- 母平均値 $m = \mathrm{E}[X]$. ($\phi(x) = x$ってこと). (x の) 母期待値とも
- 母分散 $= V[X] = \mathrm{E}[(X-m)^2]$. ($\phi(x) = (x-m)^2$ってこと)
- 母標準偏差 $= \sqrt{V[X]}$

事象の確率

事象 A の確率 $\Leftrightarrow$ 条件 $a(X)$ が成立する確率

特徴関数

$$\text{関数 } \mathbf{1}_{[a(X)]}(x) = \begin{cases} 1 & (a(x) \text{ が真}) \\ 0 & (a(x) \text{ が偽}) \end{cases}$$

とすると，

$$P(A) = P(a(X)) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[a(X)]}(X)]$$

例

$$\mathbf{1}_{[X^2 \leq 4]}(x) = \begin{cases} 1 & (-2 \leq x \leq 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

L05-Q1

Quiz(離散的な確率変数の母平均・母分散・母標準偏差)

確率変数 X は次の確率分布に従う.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{12} & (x = -1) \\ \frac{5}{12} & (x = 0) \\ \frac{3}{12} & (x = 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^X]$ を求めよう.
2. X の母平均値を求めよう.
3. X の母分散を求めよう.
4. X の母標準偏差を求めよう.
5. 事象 $X \leq 1$ の確率を求めよう.

塚田確率統計 3.4 問 1+「$P(X < 0)$ を求めよう」, 問 2.

母平均値, 母分散の性質

母平均値の性質 塚田確率統計 p.63 高校 数学 B

X: 確率変数, $a, b \in \mathbb{R}$:定数 のとき,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[aX+b] &= \sum_x f(x) \times (ax+b) \\
&= \left(a \sum_x f(x) x \right) + b \sum_x f(x) = a\mathrm{E}[X] + b. \\
\mathrm{E}[\phi_1(X) + \phi_2(X)] &= \sum_x f(x) \times (\phi_1(X) + \phi_2(X)) \\
&= \mathrm{E}[\phi_1(X)] + \mathrm{E}[\phi_2(X)].
\end{aligned}
$$

もちろん一般には $\mathrm{E}[\phi(X)] \neq \phi(\mathrm{E}[X])$, $\mathrm{E}[X^2] \neq (\mathrm{E}[X])^2$.
これ, $\sin(x^2) \neq (\sin(x))^2$ と同じくらい当たり前+だいじ.

母分散の性質 塚田確率統計 p.63 高校 数学 B

X: 確率変数, $a, b \in \mathbb{R}$:定数 のとき,

$$\mathrm{V}[aX + b] = a^2 \mathrm{V}[X].$$

母分散の性質 塚田確率統計 p.63 塚田確率統計 §4.7 問 4 高校 数学 B

$$\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2$$

L05-Q2

Quiz(確率変数の変換)

確率変数 X の母期待値, 母分散は次を満たす.

$$\mathrm{V}[X] = 9, \quad \mathrm{E}[X] = 2.$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[-X^2 + 2X - 3]$ を求めよう.
2. 確率変数 $Y = -2X - 3$ の母分散 $\mathrm{V}[-2X - 3]$ を求めよう.

L05-Q3

Quiz(離散的な確率変数の母平均値・母分散・母標準偏差・確率)

確率変数 X は次の確率分布に従う.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{55} & (0 \leq x \leq 10) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 確率 $P(X \leq 5)$ を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.

連絡

- 2017-11-17 木 1 プチテスト
- 紙レポート 2016-10-27 木昼 までに Math ラウンジ (1-614) に提出
- 配布資料は 1-503 向かいの引出, `http://hig3.net` で再配布.
- 加減乗除と平方根 (ルート) の使える電卓持ってきてね. 関数電卓でなくてもいいです. 携帯電話の機能・アプリでもかまいません.
- 樋口オフィスアワー木 6 金昼 (1-502), Math ラウンジ月-木昼 (1-614)
- 次回は 塚田確率統計 3.3 塚田確率統計 4.6 .

`https://manaba.ryukoku.ac.jp`