連続型確率変数

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I　L06(2016-10-27 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2016-10-27 Thu 19:13 JST hig"

今日の目標

- 塚田確率統計 3.3 塚田確率統計 4.6 高校 数学 B
- 連続型確率変数の確率, 母平均値, 母分散, 母期待値が計算できる
- 一様分布を例に, 母平均値・母分散・変数変換の意味が説明できる

http://hig3.net

L05-Q1

Quiz 解答:離散的な確率変数の母平均・母分散・母標準偏差

1. 期待値 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^X] = \frac{4}{12}\cdot \mathrm{e}^{-1} + \frac{5}{12}\cdot \mathrm{e}^{0} + \frac{3}{12}\cdot \mathrm{e}^{2}$.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X] = \frac{4}{12}\cdot(-1) + \frac{5}{12}\cdot 0 + \frac{3}{12}\cdot 2 = \frac{1}{6}$.
3. 母分散
   $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[(X-m)^2] = \frac{4}{12}\cdot(-1-\frac{1}{6})^2 + \frac{5}{12}\cdot(0-\frac{1}{6})^2 + \frac{3}{12}(2-\frac{1}{6})^2 = \frac{47}{36}$.
4. 母標準偏差 $\sqrt{\mathrm{V}[X]} = \sqrt{\frac{47}{36}}$.
5. 確率 $\mathrm{E}[\mathbf{1}_{[a(X)]}(X)] = \frac{4}{12}\cdot 1 + \frac{5}{12}\cdot 1 + \frac{3}{12}\cdot 0 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

L05-Q2

Quiz 解答:確率変数の変換

$\mathrm{E}[X^2] = \mathrm{V}[X] + \mathrm{E}[X]^2 = 13.$

1. $\mathrm{E}[-X^2+2X-3] = -\mathrm{E}[X^2]+2\mathrm{E}[X]-3\mathrm{E}[1] = -13+2\cdot 2-3\cdot 1 = -12.$
2. $\mathrm{V}[-2X-3] = \mathrm{V}[-2X] = (-2)^2\mathrm{V}[X] = 36.$

L05-Q3

Quiz 解答:離散的な確率変数の母平均値・母分散・母標準偏差・確率

1. $\mathrm{E}[\mathbf{1}_{[X\leq 5]}(X)] = \sum_{x=0}^{10} \frac{x}{55} \mathbf{1}_{[X\leq 5]}(x) = \sum_{x=1}^{5} \frac{x}{55} = \frac{15}{55} = \frac{3}{11}.$
2. $\mathrm{E}[X] = \sum_{x=0}^{10} \frac{x}{55} \cdot x = \frac{\frac{1}{6} \cdot 10 \cdot (10+1)(2\cdot 10+1)}{55} = \frac{385}{55} = 7.$
3. $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = \sum_{x=0}^{10} \frac{x}{55} \cdot x^2 - 7^2 = 55 - 7^2 = 6.$

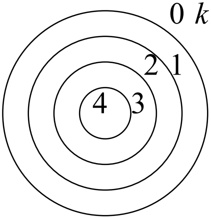
ここまで来たよ

1. 離散型確率変数

2. 連続型確率変数
   - 連続型確率変数
   - 一様分布

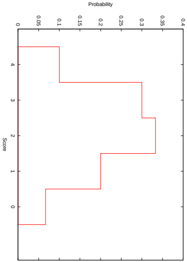
あるプレイヤーのダーツの得点確率

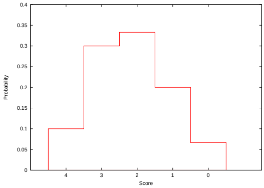
得点: 的の真ん中から順に $4, 3, 2, 1, 0$ 点



離散型確率分布

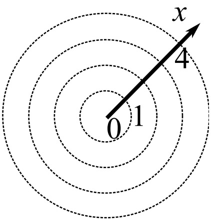
得点 s	確率関数 $f(s)$
4	0.1
3	0.3
2	0.3333
1	0.2
0	0.0667

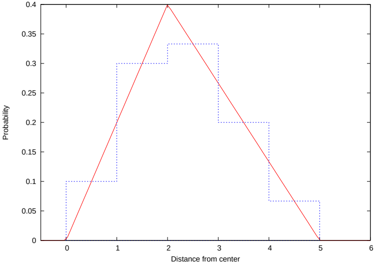




中心から x cm にあてる確率

的の真ん中からの距離 x cm, 得点 $s = 4 - x$ 点 (実数).





$r = 0.5$cm と 0.9 cm への当たりやすさは違う. $r = 1.0$cm を境に急に変わるわけじゃない. これを表現したい.

$\leadsto$ 点数の出やすさは x のある関数 $f(x)$ で表される!

連続型確率変数 連続型確率分布

連続型 確率密度関数 $f(x)$ (x は実数)

離散型 確率関数 $f(x)$ (x は整数またはとびとびの値)

連続型確率変数 塚田確率統計 3.3

連続型確率変数

連続型確率変数 X とは, 実数値をとり, 確率が確率密度関数 $f(x)$ で指定されるもの.

離散的

得点 x	確率 $f(x)$
0	0.1
1	0.3
$\vdots$	
x	$f(x)$

連続的

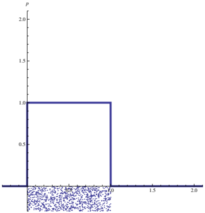
-
- $0 \leq f(x)$ である. $f(x) \leq 1$ とは限らない.

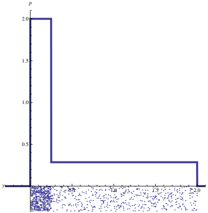
物理・工学系では $p(x)$ と書いたら確率密度関数 $f(x)$ を意味することも

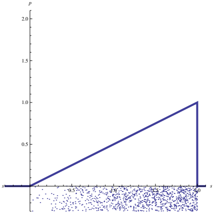
計算科学☆演習 II

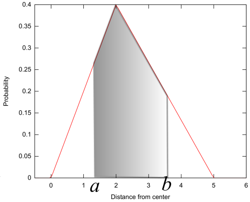
 連続型確率変数

確率密度関数の例









確率密度関数と確率

$$P(a \leq X < b) = (\text{あとで}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad (\text{下側面積})$$

連続型確率変数の母期待値

母期待値の定義

$$\text{離散型確率変数}\quad \mathrm{E}[\phi(X)] = \sum_x f(x)\cdot\phi(x)$$

$$\text{連続型確率変数}\quad \mathrm{E}[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot\phi(x)\,\mathrm{d}x$$

$\displaystyle\lim_{\text{分割}\to\text{細かく}} \sum_i f(x_i)\Delta x = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ だから自然.

- 離散型と同じ定義: 母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X]$, 母分散 $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[(X-\mu)^2]$
- $\mathrm{E}[aX+b] = a\mathrm{E}[X]+b$ 成立
- $\mathrm{V}[aX+b] = a^2\mathrm{V}[X]$ 成立
- $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2$ 成立 塚田確率統計 §4.7 問 4

L06-Q1

Quiz(連続的な値をとる確率変数)

次の確率密度関数を持つ確率変数 X を考える.

$$f(x) = \begin{cases} 8x & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

1. $X \geq +\frac{1}{4}$ となる確率を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
4. 母期待値 $\mathrm{E}[\frac{1}{\sqrt{X}}]$ を求めよう.

塚田確率統計 §4.7 問 5 | 塚田確率統計 p.65

確率密度関数から事象の確率を求める

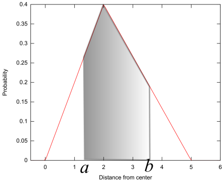
$$P(\text{事象}) = P(\text{条件}) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[\text{条件}]}(X)]$$

$$P(a \le X < b) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[a \le X < b]}(X)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathbf{1}_{[a \le X < b]}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \boxed{}$$

$$\text{全事象の確率} = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{E}[1]$$

じゃあ, ちょうど距離 $x = a$ cm となる確率は? $\rightsquigarrow \boxed{}$.



$$\mathbf{1}_{[X\text{ の条件}]}(x) = \begin{cases} 1 & (x\text{ が条件を満たす}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

L06-Q2

Quiz(連続型確率変数)

次の確率密度関数を持つ確率変数 X を考える.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & (0 \leq x < 2) \\ \frac{1}{2} & (2 \leq x < 3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
2. 確率 $P(X \geq 1)$ を求めよう.
3. 母期待値 $\mathrm{E}[\frac{1}{X}]$ を求めよう.

ここまで来たよ

1. 離散型確率変数
2. 連続型確率変数
   - 連続型確率変数
   - 一様分布

一様分布 塚田確率統計 4.6

一様分布 $\mathrm{U}(a,b)$

確率変数 X の確率密度関数が次で与えられるとき, X は区間 $[a,b)$ の一様分布 $\mathrm{U}(a,b)$ に従うという.

$$f(x) = \begin{cases} C(\text{定数}) & (a \le x < b) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

L06-Q3

Quiz(一様分布)

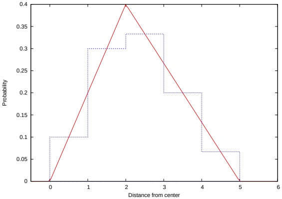
連続型確率変数 X が一様分布 $\mathrm{U}(a,b)$ にしたがう.

1. C を求めよう.
2. $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. $\sqrt{\mathrm{V}[X]}$ を求めよう.

連続型確率変数の母平均値と母分散の直観的意味

待てチェビシェフの不等式 確率統計☆演習 I(2016)L7 . 大数の法則 確率統計☆演習 I(2016)L8 .

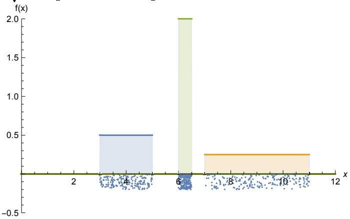
$f(x)$ のグラフ



$Y = aX + b$ の意味

X が 一様分布 $\mathrm{U}(r, s)$ にしたがうとき,
$Y = aX + b$ は 一様分布 $\mathrm{U}(ar + b, as + b)$ にしたがう.

$\mathrm{E}[aX + b] =$
$\sqrt{\mathrm{V}[aX + b]} =$



左から $X \sim \mathrm{U}(3, 5)$, $Z = \frac{1}{4}X + \frac{21}{4}$, $Y = 2X + 1$.

連絡

- 紙レポートは 2016-10-27 木昼に Math ラウンジ 1-614 に提出．隣の 1-612 で Excel 使えます．
- 配布資料は 1-503 向かいの引出, `http://hig3.net` で再配布．
- 加減乗除と平方根 (ルート) の使える電卓持ってきてね．関数電卓でなくてもいいです．携帯電話の機能・アプリでもかまいません．
- 樋口オフィスアワー木 6 金昼 (1-502), Math ラウンジ月-木昼 (1-614)
- 次回は 塚田確率統計 3.5 塚田確率統計 4.1 塚田確率統計 4.2

`https://manaba.ryukoku.ac.jp`

プチテスト実施計画

日時 2016-11-17 木 1. ただし, 2016-11-03 木は授業がないので注意.

場所 7-002. 個人別座席指定あります.

配点 科目の 100 ピーナッツ中 30 ピーナッツ.

持込 なし. 電卓もなし.

おすすめの準備方法 過去問もあるけど, 範囲が微妙に違います. 下の出題計画を参照して, すべての trial がスムーズにできるようになっておくとよいでしょう. 予習問題も再トライできます (点数は変化しません).

プチテスト出題計画案

計画中です．2016-11-11 金に確定します (Web 参照)．多くの独立な小問からなる構成です．Excel の操作に関することは出題しません．

- データから平均値, 分散, 標準偏差を求める
- データから四分位数などを求め, 箱ひげ図を描く
- データから標準得点, 偏差値を求める.
- データから共分散, 相関係数, 回帰係数, 回帰直線を求める
- 離散型確率変数について, 確率関数から確率, 母期待値, 母平均値, 母分散, 母標準偏差を求める $\times 2$
- 連続型確率変数について, 確率密度関数から確率, 母期待値, 母平均値, 母分散, 母標準偏差を求める $\times 2$
- 確率変数の 1 次式や 2 次式について, 母平均値, 母分散, 母標準偏差を求める
- いろんな量の正しい意味 (数学的, データ解釈的) を選ぶ/答える問題 (Trial にはなかった)
- (未定)