確率統計☆演習 I ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] 配布: 2018-01-24 水 更新: Time-stamp: "2018-03-29 Thu 18:42 JST hig"

ファイナルトライアル参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
4. 別に配布する数表を利用してよい. 数表の紙に記入したものは採点対象にならない.

1

離散型確率変数 X の確率分布は次の $f(x)$ で与えられる.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{21}x & (x = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[\frac{1}{X}]$ を求めよう.
2. 母期待値 $\mathrm{E}[\cos(\frac{1}{2}X\pi)]$ を求めよう.
3. 確率 $P(X^5 + 13X < 200)$ を求めよう.

2

連続型確率変数 X は次の確率密度関数 $f(x)$ を持つ.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{64}x^4 & (-2 \leq x < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
2. 母期待値 $\mathrm{E}[7X^2 + 5X + 3]$ を求めよう.
3. 確率 $P(|X| > 1)$ を求めよう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

3

表が $\frac{3}{5}$, 裏が $\frac{2}{5}$ の確率ででるコインを 600 回投げるとき, 表のでる回数を確率変数 U とする.

1. 確率 $P(U=366)$ を求めよう. 組み合わせの数 ${}_n\mathrm{C}_k = \binom{n}{k}$ は答に残さず 積や階乗や累乗で書き表すこと. 積や階乗や累乗は具体的に計算しなくてよい.
2. 確率 $P(U \geq 366)$ を, 600 が十分に大きいと考えて, 標準正規分布の上側確率 $Q(u)$ で近似的に表そう.

4

1. 確率変数 Z は母平均値 0, 母分散 1^2 の標準正規分布にしたがう. 確率 $P(Z < -0.57)$ を求めて小数値で答えよう.
2. 確率変数 X は母平均値 7, 母分散 3^2 の正規分布にしたがう. 確率 $P(8 \leq X < 12)$ を定積分で具体的に (つまり, 積分を実行せずに $\int_0^\pi \sin(x)\ \mathrm{d}x$ のような形で) 答えよう.
3. 1,2 の Z と X について, $P(8 \leq X < 12) = P(a \leq Z < b)$ となるような a, b を正確に具体的に (=分数や小数で)1 組求めよう.

5

ある春巻きの皮製造マシンの作る皮の面積 Xcm^2 は, ある確率分布にしたがう確率変数である. 4 枚作ってみたところ, 面積は以下のようだった. X の母分散を点推定しよう. 単位をつけて, 「母分散」を含む完全な日本語の文で答えよう.

$$158\mathrm{cm}^2,\quad 158\mathrm{cm}^2,\quad 161\mathrm{cm}^2,\quad 163\mathrm{cm}^2$$

6

滋賀県に生息するある水鳥の卵の重さ $X\mathrm{g}$ は正規分布にしたがう. X の母分散が日本全体での母分散 $81\mathrm{g}^2$ よりも小さいことを言いたい. そのために帰無仮説を「X の母分散は $81\mathrm{g}^2$ である」, 対立仮説を「X の母分散は $81\mathrm{g}^2$ より小さい」として母分散のカイ二乗検定を行う.

1. 滋賀県で, 卵 5 個からなる標本を抽出したところ, 重さの標本平均値が $102\mathrm{g}$, 不偏標本分散が $6^2\mathrm{g}^2$ だった.
   このときカイ二乗統計量 (表の数値と大小を比較する相手の量) の値を求めよう.
2. (採点者のご都合で, 上で求めた値とは異なる設定にするが)
   仮にカイ二乗統計量の値が $Y = 0.2345$ だったとするとき, 有意水準 $\alpha = 0.01$ での片側カイ二乗検定の結論を「(不等式)…が成立するので, 帰無仮説を…よって…水鳥…と結論…」 の形で書こう.

7

滋賀県に生息するある水鳥の卵の重さ $X\mathrm{g}$ は正規分布にしたがう. X の母平均値が日本全体での母平均値 $90\mathrm{g}$ と異なることを言いたい. そのために「X の母平均値は $90\mathrm{g}$ である」を帰無仮説として, t 検定を行う.

1. 滋賀県で, 卵 5 個からなる標本を抽出したところ, 重さの標本平均値が $102\mathrm{g}$, 不偏標本分散が $6^2\mathrm{g}^2$ だった.
   このとき T 統計量 (表の数値と大小を比較する相手の量) の値を求めよう.
2. (採点者のご都合で, 上で求めた値とは異なる設定にするが)
   仮に T 統計量の値が $T = 2.345$ だったとするとき, 有意水準 $\alpha = 0.05$ での t 検定の結論を「(不等式)…が成立するので, 帰無仮説を…よって…水鳥…と結論…」 の形で書こう.

8

過程不要

メンバー 48 名からなるアイドルグループ K の総選挙で, アイドル M の得票率を発表前に予想するため, 内証で投票箱から無作為に 50 票をとりだして, M への投票を数えたところ, 10 票だった.

1. 総選挙での M の得票率 p を, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ で区間推定しよう. 加減乗除・分数・累乗・平方根の残った未整理な形で答えること. p 以外の文字は答えに残さないこと.
2. 一般に標本サイズが大きければ大きいほど, 推定は正確になる. しかし, 大きな標本の抽出にはお金や危険がかかるので, いくらでも大きくするわけにはいかない. 信頼区間の幅 (長さ) を上で求まったものの約 $1/10$ 倍にするには, 何票を取り出せばいいか.

9

過程不要

確率変数 X は, 未知の母平均値 μ と未知の母分散 σ^2 の正規分布にしたがう. サイズ $n = 9$ の標本を抽出したところ, 標本平均値 $\overline{X} = 130$, 不偏標本分散 $s^2 = 25$ だった.

1. 母平均値 μ を, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ で区間推定しよう.
2. 母分散 σ^2 を, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$ で区間推定しよう.

いずれも, 整理せず, 加減乗除 分数 累乗 平方根の残った未整理な形で答えること. μ, σ 以外の文字は答えに残さないこと.

10

過程不要

統計的仮説検定について, 正しい文に○, 誤りの文に×をつけよう.

1. 検定統計量が極端な値にならなかったとき, 帰無仮説を棄却する
2. 有意水準より p 値が小さいとき, 帰無仮説を棄却する
3. 有意水準を小さく取るほど, 帰無仮説は棄却されやすくなる
4. 帰無仮説と対立仮説の両方が成立することはない

11

過程不要

標本抽出と推定について, 正しい文に○, 誤りの文に×をつけよう.

1. 不偏標本分散は, 一般に, 標本抽出のたびに異なる値になる
2. 母分布 (母集団) が定まると, 母分散の値は定まる
3. 標本抽出を行うと, 標本サイズと信頼係数は決まる
4. 標本平均値を推定するために, 母平均値が計算される

12

過程不要

次の Y はどのような確率分布にしたがうか. 次の選択肢の中から選ぼう. ただし, $\mu, \sigma^2, n, p, k, a, b$ のところに数値を入れて, 例えば「$\mathrm{N}(0, 1^2)$」 のように答えよう

1. 正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう Z に対して, $Y = 2Z + 3$.
2. 正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう Z に対して, $Y = Z^2$.
3. あたりの確率 $1/5$ のくじを 3 回引いたときのあたりくじの本数 Y.

選択肢

- カイ二乗分布 $\chi^2(k)$.
- t 分布 $t(k)$.
- 二項分布 $\mathrm{B}(n, p)$
- 正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$
- 一様分布 $\mathrm{U}(a, b)$

確率統計☆演習 I ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2]　配布: 2018-01-24 水更新: Time-stamp: "2018-03-29 Thu 18:42 JST hig"

これは, 一部の過程のみ記した略解です. 参加者はすべての過程を記す必要があります.

配点　各問配点ばらばら, 計 100 点.

1

1. $\mathrm{E}[\frac{1}{X}] = \sum_{x=1}^{6} \frac{1}{21} x \cdot \frac{1}{x} =$
   $frac121 \sum_{x=1}^{6} 1 = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.
2. $\mathrm{E}[\cos\frac{1}{2}X\pi] = \frac{1}{21}(1\cos\frac{1}{2}\pi + \cdots) = \frac{1}{21}(0-2+0+4+0-6) = -\frac{4}{21}$.
3. $P(X^5 < 200) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[X^5<200]}(X)] = \frac{1}{21}(1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 0 + 0 + 0 + 0) = \frac{1}{7}$.

配点　1-3:各 3 点, 計 9 点.

講評　確率分布が定数 $f(x) = \frac{1}{21}$ って決めつけてる人が一定数いたけど, 見るからに全確率 $\mathrm{E}[1]$ が 1 にならないじゃん.

1. いきなり $x = 1, 2, \ldots$ をいれないで, まず $\sum$ の中を整理しようよ…

2

1. $f(x)$ は偶関数なので, $\mathrm{E}[X] = 0$. $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] = 2\int_0^2 \frac{5}{64}x^4 \cdot x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{20}{7}$.
2. $\mathrm{E}[7X^2 + 5X + 3] = 7\mathrm{E}[X^2] + 5\mathrm{E}[X] + 3 = 7\cdot\frac{20}{7} + 0 + 3 = 23$.
3. $P(|X| > 1) = \mathrm{E}[\mathrm{I}_{[|X|>1]}(X)] = \mathrm{E}[\mathrm{I}_{[X<-1 \text{ or } +1<X]}(x)] = \int_{-2}^{-1} \frac{5}{64}x^4 \,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{5}{64}x^4 \,\mathrm{d}x = 2\int_1^2 \frac{5}{64}x^4 \,\mathrm{d}x = 1 - 2^{-5}$.
   別解. $P(|X| > 1) = 1 - P(|X| \leq 1) = 1 - \int_{-1}^{1} \frac{5}{64}x^4 \,\mathrm{d}x$.

配点　1:4 点, 2:2 点, 3:4 点, 計 10 点.

講評　奇関数の正負対称領域での定積分は 0, というのは一瞬で気づいてほしいな〜

不等式を等号にして出てくる値の間で積分しとけばいいだろ, みたいな発想の人は考え直してください.

3

1. 表の出る回数 U は，二項分布 $\mathrm{B}(600, \frac{3}{5})$ にしたがう． よって，$P(U = 396) = \frac{600!}{366!(600-366)!}(\frac{3}{5})^{366}(\frac{2}{5})^{600-366}$.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

2. $\mathrm{E}[U] = 600 \cdot \frac{3}{5} = 360$, $\mathrm{V}[U] = 600 \cdot \frac{3}{5}\frac{2}{5} = 12^2$. 中心極限定理より, U は近似的に正規分布 $\mathrm{N}(360, 12^2)$ にしたがう (数学的に正確ではない言い方). $Z = \frac{U-360}{12}$ は近似的に標準正規分布にしたがう. よって, $P(U \geq 366) = P(Z \geq \frac{1}{2}) = Q(\frac{1}{2})$.

配点 1:4 点, 2:6 点, 計 10 点.

4

標準正規分布の確率密度関数 $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z'^2}{2}}$, 上側確率 $Q(z)$ $Q(z) = \int_z^\infty f(z')\,\mathrm{d}z'$ とおく.

1. $P(Z < -0.57) = 1 - Q(-0.57) = 1 - (1 - Q(0.57)) = Q(0.57) = 0.284339$.
2. $P(8 < X < 12) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 3^2}} \int_8^{12} e^{-\frac{(x-7)^2}{2\cdot 3^2}}\,\mathrm{d}x$.
3. $Z = \frac{X-7}{3}$ とおくと, Z は標準正規分布にしたがう. よって, $P(8 \leq X < 12) = P(8 \leq 3Z + 7 < 12) = P(\frac{1}{3} \leq Z < \frac{5}{3})$.

配点 1-3:各 3 点, 2:6 点, 計 9 点.

5

標本平均値は $\frac{1}{4}[68 + \cdots + 73] = 70$. 不偏標本分散は $\frac{1}{4-1}[(158 - 160)^2 + \cdots + (163 - 160)^2] = 6$. 母分散を 6cm^4 と推定する.

配点 不偏標本分散の値 3 点, 推定 2 点, 単位 1 点.

6

1. $Y = (5-1) \cdot \frac{6^2}{9^2} = \frac{16}{9}$.
2. 不等式 $0.2354 < 0.2971 = \chi^2_{0.01}(4)$ が成立するので, 帰無仮説を棄却する. よって滋賀県に生息するその水鳥の卵の重さの母分散は $81\mathrm{g}^2$ より小さいと結論する.

配点 1:3 点,2:6 点, 計 9 点.

7

1. $T = \frac{102-90}{6/\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$.
2. $T = 2.345 < 2.776 = t_{0.05/2}(5-1)$ が成立するので, 帰無仮説を棄却できない. よって, 滋賀県に生息するその水鳥の卵の重さの母平均値は 90g と異なるとは結論できない.

配点 1:3 点,2:6 点, 計 9 点.

8

標本サイズは $n = 50$. 標本比率は $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$

1. 標本比率 r は, 母平均値 p, 母分散 $\frac{1}{n}p(1-p)$ の正規分布に近似的に従うので,

$$\frac{1}{5} - 2.58 \times \sqrt{\frac{1}{50}\frac{1}{5}(1-\frac{1}{5})} < p < \frac{1}{5} + 2.58 \times \sqrt{\frac{1}{50}\frac{1}{5}(1-\frac{1}{5})}$$

2. 信頼区間の長さは, 標本比率が一定だとすると, 標本サイズ n の平方根に反比例するので, 標本サイズを 10^2 倍の 5000 にすればよい.

配点　1:7 点,2:3 点, 計 10 点.

9

1. $\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}}$ は自由度 $n-1=8$ の t 分布に従う. よって, 信頼係数 $1-\alpha = 0.99$ の信頼区間は,

$$\begin{aligned} 130 - t_{0.01/2}(8) \times \sqrt{25/9} <& \mu < 130 + t_{0.01/2}(8) \times \sqrt{25/9} \\ 130 - 3.355 \times \sqrt{25/9} <& \mu < 130 + 3.355 \times \sqrt{25/9} \end{aligned}$$

2. $(n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2}$ は自由度 $n-1=8$ のカイ二乗分布に従う. よって, 信頼係数 $1-\alpha = 0.95$ の信頼区間は,

$$\begin{aligned} (9-1) \cdot \frac{25}{\chi^2_{0.05/2}(8)} <& \sigma^2 < (9-1) \cdot \frac{25}{\chi^2_{1-0.05/2}(8)} \\ (9-1) \cdot \frac{25}{17.5345} <& \sigma^2 < (9-1) \cdot \frac{25}{2.1797} \end{aligned}$$

配点　1,2:各 7 点, 計 14 点.

10

2,4

配点　1-4:各 1 点, 計 4 点.

11

1,2

配点　1-4:各 1 点, 計 4 点.

12

1. 正規分布 $\mathrm{N}(3, 2^2)$.
2. カイ二乗分布 $\chi^2(1)$.
3. 二項分布 $\mathrm{B}(3, \frac{1}{5})$.

配点　1-3:各分布 1 点, パラメタ 1 点, 計 6 点.

講評　2 はほぼカイ二乗分布の定義. 3 は, 多数回だったら ‘近似的に’ 正規分布になりうるけど, 3 回は近くなるほどじゃないし, ここでは厳密に二項分布にしたがうので, 二項分布が適切.