正規分布と中心極限定理

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I L09(2017-11-29 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2017-11-30 Thu 07:24 JST hig"

今日の目標

- 正規分布の母平均値・母分散・確率が積分や表で求められる. 西川確率統計 p.68-69
- 中心極限定理の意味が説明でき, 確率の近似計算に利用できる. 西川確率統計 §4.2

http://hig3.net

L08-Q1
Quiz 解答:連続的な値をとる確率変数

1.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathbf{1}_{[X\geq\frac{1}{4}]}(x)\;\mathrm{d}x = \int_{1/4}^{1/2} 8x\;\mathrm{d}x = \frac{3}{4}.$$

2.
$$\mathrm{E}[X] = \int_{0}^{1/2} f(x)\cdot x\;\mathrm{d}x = 1/3.$$

3.
$$\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = \tfrac{1}{8} - (\tfrac{1}{3})^2 = \tfrac{1}{72}.$$

4.
$$\mathrm{E}[\tfrac{1}{\sqrt{X}}] = 2^{5/2}/3.$$

L08-Q2
Quiz 解答:連続型確率変数

1. $\frac{23}{12}$
2. $\frac{7}{8}$
3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\log 3 - \log 2)$.

L08-Q3

Quiz 解答:一様分布

1. $\mathrm{E}[1] = 1$ より, $C = \frac{1}{b-a}$.
2. $\mathrm{E}[X] = \frac{a+b}{2}$.
3. $\sqrt{\mathrm{V}[X]} = \frac{b-a}{\sqrt{12}} \simeq \frac{b-a}{3.5}$.

ここまで来たよ

1. 連続型確率変数
2. 正規分布と中心極限定理
   - 正規分布
   - 中心極限定理と正規近似

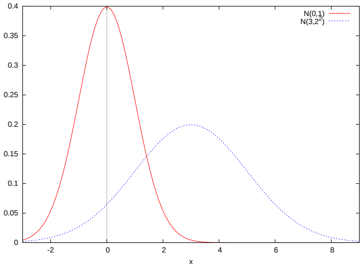
一般の正規分布 高校 数学 B 西川確率統計定義 3.5(p.68)

正規=normal

(一般の) 正規分布 $\mathrm{N}(b, a^2)$ の確率密度関数

$$f(x; b, a^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}.$$

b, a^2:パラメタ



難しいので，まず $b = 0, a = 1$ の場合を考える．標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$

$z = \frac{x-b}{a}$ または $x = az + b$

$y = f(z; 0, 1)$ のグラフを，横に a 倍，横に b だけ平行移動して，縦に $1/\sqrt{a^2}$ 倍したものが $y = f(x; b, a^2)$

標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1^2)$ の性質

標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1^2)$ の確率密度関数

$$f(z;0,1^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}.$$

$\mathrm{E}[1]=1,$ 西川確率統計 (3.7)(p.68) 微積分 II

$\mathrm{E}[Z]=0,$ 奇関数. 西川確率統計例 3.2(p.68)

$\mathrm{V}[Z]=1$ 西川確率統計例 3.2(p.68) 微積分 II

累積分布関数と上側確率

一般に, 確率密度関数 $f(x)$ を持つ連続型確率変数 X に対して,

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x = P(X < a).$$

N$(0, 1^2)$ の場合

$$\text{累積分布関数 } \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} f(z'; 0, 1^2)\mathrm{d}z'.$$

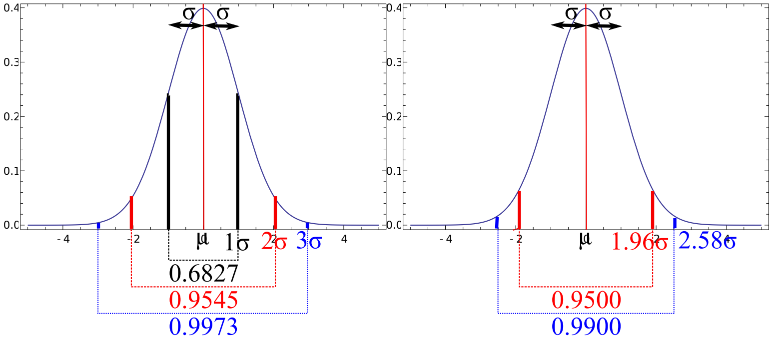
$$\text{上側確率 } Q(z) = 1 - \Phi(z) = \int_{z}^{\infty} f(z'; 0, 1^2)\,\mathrm{d}z' = P(Z > z)$$

z' はもちろん導関数でなく z の親戚の積分変数.

上側確率と数表

- 単調減少. $Q(-\infty) = 1, Q(+\infty) = 0$.
- $f(z; 0, 1^2)$ が偶関数 $\rightsquigarrow$ $Q(-z) = 1 - Q(z), Q(0) = \frac{1}{2}$.

$\rightsquigarrow$ 確率 $P(c < z < d)$ は $Q(z)$ (ただし $0 < z < +\infty$) で表せる. $\rightsquigarrow$ $Q(z)$ の表 西川確率統計表 B(p.188)



L09-Q1

Quiz(標準正規分布の確率)

Z は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う．$Z < -2$ となる確率を, $Q(z)$ (ただし $0 < z < +\infty$) で表し．また表から小数で求めよう．

L09-Q2

Quiz(標準正規分布の確率)

Z は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う連続型確率変数である．

1. 母期待値 $\mathrm{E}[Z^2]$ を求めよう．
2. 確率 $P(-0.56 < Z < +1.23)$ を $Q(z)$ (ただし $0 < z < +\infty$) で表し，表から小数で求めよう．

ふたたび一般の正規分布 $\mathrm{N}(b; a^2)$

$Z = \frac{X-b}{a}$ または $X = aZ + b,\ Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$.

$$\mathrm{E}[1] = 1,$$ 西川確率統計 (3.7)(p.68) 微積分 II

$$\mu_{\mathrm{X}} = \mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[aZ + b] = b,$$ 西川確率統計例 3.2(p.68)

$$\sigma_{\mathrm{X}}^2 = \mathrm{V}[X] = \mathrm{V}[aZ + b] = a^2,$$ 西川確率統計例 3.2(p.68) 微積分 II

つまり, $b = \mu_{\mathrm{X}} = m, a^2 = \sigma_{\mathrm{X}}^2 = v$ってこと.

(一般の) 正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ 西川確率統計定義 3.5(p.68)

母平均値 μ, 母分散 σ^2 の正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数は,

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

L09-Q3

Quiz(正規分布の確率)

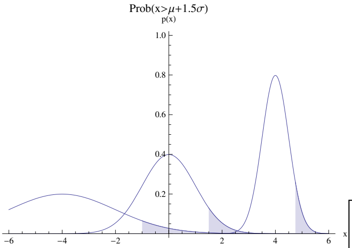
連続型確率変数 X は, 確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 3^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-4)^2}{2 \cdot 3^2}}$$

にしたがう.

1. $f(x)$ のグラフを描こう.
2. $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.

正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率の求め方 I



対応する $Z = \frac{X-\mu_X}{\sigma_X} \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ の範囲を考えて, 表から求める.

一般の正規分布の確率

$X \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2), \quad Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ のとき

$$P(c < X < d) = P(\frac{c-\mu_X}{\sigma} < \frac{X-\mu_X}{\sigma} < \frac{d-\mu_X}{\sigma}) = P(\frac{c-\mu_X}{\sigma} < Z < \frac{d-\mu_X}{\sigma})$$

L09-Q4

Quiz(正規分布の確率)

X が母平均値 3, 母分散 4 の正規分布にしたがうとする. 次を, $Q(z)$ (ただし $0 < z < +\infty$) で, さらに, 表を使って小数で書こう.

1. $X \geq 5$ となる確率
2. $+1 \leq X \leq 7$ となる確率

ここまで来たよ

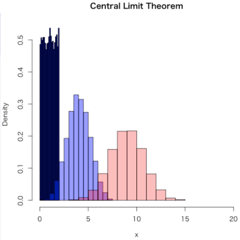
1. 連続型確率変数
2. 正規分布と中心極限定理
   - 正規分布
   - 中心極限定理と正規近似

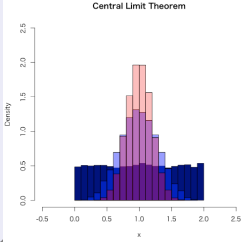
中心極限定理 西川確率統計 §4.2

中心極限定理 (いいかげんバージョン)

$X_1, \ldots, X_n$ が母平均値 μ, 母分散 σ^2 の独立同分布に従うとき, $n \to +\infty$ で

- $U_n = X_1 + \cdots + X_n$, の確率分布は,
  の ______ に似る
- $W_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ の確率分布は,
  ______ に似る
- $Z_n = \frac{W_n - \mu}{\sigma\sqrt{n}}$ の確率分布は,
  ______ に似る





中心極限定理 (厳密バージョン) 西川確率統計定理 4.3(p.87)

確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が, 母平均値 μ, 母分散 σ^2 の独立同分布に従うとする. 正規分布じゃない. どんな分布でも可

$Z_n = \dfrac{\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)-\mu}{\sigma} \times \sqrt{n}$ とすると,

Z_n は, $n \to +\infty$ の極限で, $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う. すなわち

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \leq Z_n < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$$

「Z_n は $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう Z に法則収束する」

法則収束とは, 関数列がある関数に収束すること.

証明

$\mathrm{E}[Z_n] = 0, \mathrm{V}[Z_n] = 1$ はすぐわかるが…

モーメント母関数を使うと瞬殺 確率統計☆演習 II()L

独立同分布にしたがう確率変数の和の正規近似 西川確率統計 §8.4

L09-Q5

Quiz(中心極限定理)

確率変数 $X_1,\dots,X_{100}$ は $\mathrm{E}[X_i]=1, \mathrm{V}[X_i]=\frac{1}{4}$ の独立同分布に従う. 次の確率変数の母平均値と母分散を求めよう. また, $n=100$ が十分に大きいと思って, 指定の確率を求めよう.

1. 確率変数 $U=X_1+X_2+X_3+\cdots+X_{100}$. 確率 $P(U>110)$.
2. 確率変数 $W=\frac{1}{100}(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_{100})$. 確率 $P(W<1.01)$.

二項分布の正規近似 高校 数学 B 西川確率統計 §8.4

L09-Q6

Quiz(二項分布と正規分布と中心極限定理)

表が確率 $\frac{1}{10}$, 裏が確率 $\frac{9}{10}$ ででるコインを, 400 回投げるとき, 表がでる回数を確率変数 U とする.

1. U はどのような二項分布にしたがうか. $\mathrm{B}(?,?)$ の形で答えよう.
2. U は近似的にどのような正規分布にしたがうか. $\mathrm{N}(?,?)$ の形で答えよう.
3. 表が 31 回より多くでる確率を, 標準正規分布の上側確率 $Q(z)$ を用いて表し, さらに正規分布表を用いて小数値として近似的に求めよう.

連絡

- 来週は 7-002．最初に紙の trial.
- 配布資料は 1-503 向かいの引出, `http://hig3.net` で再配布．
- 加減乗除と平方根 (ルート) の使える電卓持ってきてね．関数電卓でなくてもいいです．携帯電話の機能・アプリでもかまいません．
- 樋口オフィスアワー月 3.5(1-539) 金 4(1-502), Math ラウンジ月-木昼 (1-614)
- 次回は 西川確率統計 §6.1-§6.3