母分散の区間推定と検定

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I　L13(2018-01-10 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2018-01-13 Sat 09:45 JST hig"

今日の目標

- カイ二乗分布の定義と母平均値などの性質が説明できる 西川確率統計 §6.4.3
- 標本から母分散を区間推定できる 西川確率統計 S8.3
- 標本から母分散の片側/両側カイ二乗検定ができる 西川確率統計 §7.4.3

http://hig3.net

L12-Q1

Quiz 解答:母平均値の検定 (母分散未知)=t 検定

1. 有意水準 0.05 で, 正規分布の母平均値に対する t 検定を行う.
2. 帰無仮説を「ドーナツの重さの母平均値 μ が 57g に等しい」とする.
3. サイズ $n = 5$ の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を s^2 とするとき, 検定統計量
$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}}$$
は, 自由度 $5 - 1$ の t 分布に従う.
4. この標本に対して, $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{51-57}{\sqrt{\frac{1}{5}\frac{16}{5-1}}} = -3\sqrt{5} = -6.708.$

5. t 分布表より, $t_{0.05/2}(4) = 2.776 < |t|$ だから, 帰無仮説を棄却する. ドーナツの重さの母平均値は 57g と異なる, と結論する.
(注: このことを, 「有意」significant という言葉で表現する人もいる. 結果は有意である, 母平均値 μ は 57g と有意に異なる, 母平均値 μ と 55 の間には有意差がある, 有意な標本である, など)

L12-Q2

Quiz 解答:正規分布の母平均値に関する t 検定

1. 有意水準 0.05 で, 正規分布の母平均値に対する t 検定を行う.
2. 帰無仮説を「ドーナツ販売開始後の, 来店客数の母平均値 μ は 196 に等しい」とする.
3. サイズ $n = 4$ の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を s^2 とすると, 検定統計量

$$T = \frac{\bar{X} - 196}{\sqrt{s^2/n}}$$

は, 自由度 $4 - 1$ の t 分布に従う.

4. この標本に対して, $\bar{X} = 200, s^2 = \frac{224}{4-1} = 74.7$. よって, $t = \frac{200-196}{\sqrt{\frac{1}{4}\frac{224}{3}}} = 0.92582$.
5. t 分布表より, $t_{0.05/2}(3) = 3.182 > |t|$ だから, 帰無仮説は棄却できない. 来店客数が変化したとは結論できない.
   (注: 結果は有意でなかった, 母平均値 μ と 196g の間には有意差がない, など).

重さは負にならないし, 来店客数は離散型だから, 正規分布にしたがうというのはおかしな前提だが, ここは練習ってことで. 世の中には変な状況下で強引に t 検定を使う人が多くいるが, 数理の人はおかしさを認識できるように.

L12-Q3

Quiz 解答:母比率の二項検定の正規近似

1. 有意水準 0.05 で, 母比率の検定を行う.
2. 帰無仮説を「瀬田学舎生のうち, 滋賀県の高校を卒業した人の母比率は $p = 0.5$」とする.

3. サイズ $n = 68$ の標本の標本比率を $\hat{p}$ とすると, 検定統計量

$$Z = \frac{\hat{p} - 0.5}{\sqrt{0.5(1-0.5)/68}}$$

は, 標準正規分布に近似的にしたがう.

4. この標本に対して, $\hat{p} = 35/68 = 0.5147$ より, $z = 0.2425$.
5. 標準正規分布表 (または t 分布表の $t_{0.05/2}(\infty)$ 欄) から, $1.960 > |z|$. すなわち, z は棄却域に含まれない. だから, 帰無仮説は棄却できない. 瀬田学舎生のうち, 滋賀県の高校を卒業した人の母比率は $p = 0.5$ でない, とは結論できない.

不自然な問題設定. ふつうは $p \neq 0.5$ でなく $p > 0.5$ と言いたいでしょう. そういうときは, 帰無仮説は同じで, (ここでやった) 両側検定のかわりに片側検定をする.

ここまで来たよ

ちらばり (不偏標本分散) のちらばりを考えたい

ポテトフライ S の重さのちらばりって? $\sqrt{\text{母分散}} \xleftarrow{\text{点推定}} \sqrt{\text{不偏標本分散}}$

- 母分散の点推定の精度って?

	の点推定	の区間推定
母平均値 μ	標本平均値 $\overline{X} = \frac{1}{n}[X_1 + \cdots]$	$\overline{X} - \square\sqrt{} < \mu < \overline{X} + \square\sqrt{}$
母分散 σ^2	不偏標本分散 $s^2 = \frac{1}{n-1}[(X_1 - \overline{X})^2 + \cdots]$	$< \sigma^2 <$

母集団が正規分布にしたがうとき

- 標本平均値の分布 ($\boxed{}$) をうまく平行移動, 拡大縮小すると標準正規分布
- 不偏標本分散の分布をうまく拡大縮小するとカイ二乗分布

$Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ (標準正規分布) のとき

$X_1 = 2Z$

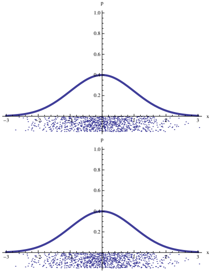
$X_2 = Z + 3$

$X_3 = 2Z + 3$

$W_k = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_k$

$Y_1 = Z^2$
(注:$\mathrm{V}[Z] = \mathrm{E}[Z^2] - 0^2$)

$Y_2 = Z_1^2 + Z_2^2$
$\vdots$
$Y_k = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_k^2$



カイ二乗分布 西川確率統計定理 6.4(p.142)

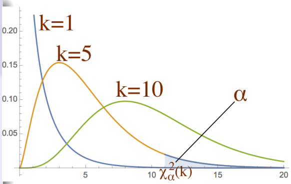
カイ二乗分布

$Z_1, \ldots, Z_k$, を標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う独立な確率変数とするとき,
確率変数 $Y = Z_1^2 + \cdots + Z_k^2$ とおく.
Y は, 自由度 k のカイ二乗分布 $\chi^2(k)$ に従う.

言語	小	大	読み
英語	x	X	エクス
ギリシャ語	χ	X	カイ

$\chi^2(k)$ の確率密度関数 西川確率統計定義 6.2(p.141)

$$f_k(y) = \begin{cases} C_k \times y^{\frac{k}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y} & (y \geq 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$



$\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[Z_1^2 + \cdots + Z_k^2] = k, \mathrm{V}[Y] = \text{積分} = 2k.$

ここまで来たよ

不偏標本分散のしたがう分布

不偏標本分散のしたがう分布 西川確率統計定理 6.5(p.142)

確率変数 X が正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従うとする．サイズ n の標本の不偏標本分散

$$s^2 = \frac{1}{n-1}[(X_1 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2]$$

を考えたとき，

$$Y = (n-1) \times \frac{s^2}{\sigma^2}$$

は自由度 $k = n - 1$ の カイ二乗分布 $\chi^2(n-1)$ にしたがう．

比 $\frac{\text{不偏標本分散}}{\text{母分散}}$ は 1 に近いが，実は，$\frac{Y}{n-1}$. $(Y \sim \chi^2(n-1))$

証明じゃないけど説明

西川確率統計付録 A4.2(p.182)

独立な $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対して,

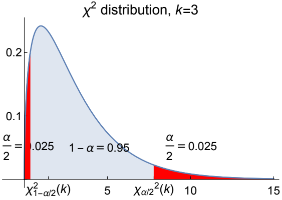
$$n \times \frac{1}{n}\left[\left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_n - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

は自由度 n のカイ二乗分布 $\chi^2(n)$ にしたがう.
不偏標本分散 s^2 に対して,

$$Y = (n-1) \times \frac{s^2}{\sigma^2} = (n-1) \times \frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{X_1 - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_n - \overline{X}}{\sigma}\right)^2\right]$$

は自由度は $n-1$ のカイ二乗分布 $\chi^2(n-1)$ にしたがう.
$-\mu$ でなく $-\overline{X}$ であるため自由度 $n-1$.

母分散の区間推定



$\chi^2_\alpha(k)$ の定義 西川確率統計定義 6.3(p.143)

$\alpha = P(Y > \chi^2_\alpha(k))$.

$$P(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < (n-1) \times \frac{s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)) = 1-\alpha$$

不等式を σ^2 について解いて，

母分散の信頼区間 西川確率統計 §8.3

標本の不偏標本分散が s^2 のとき，母分散 σ^2 の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は

$$\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \times s^2 < \sigma^2 < \frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \times s^2$$

だいたい s^2 だけど，「かける」補正係数 $(n-1)/\chi^2 \simeq 1$.

L13-Q1

Quiz(母分散の区間推定)

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは正規分布に従うという.
お店で 9 個のポテトフライ S サイズを買って重さを量り, サイズ 9 の標本とした. このとき
標本平均値は 80g, 不偏標本分散は 72g^2 だった.
母分散を信頼係数 $1-\alpha=0.95$ で区間推定しよう.

西川確率統計例題 8.3(p.167), 問題 8.3(p.167), 演習 8.1,8.2(p.171)

L13-Q2

チーム	標本サイズ	滋賀県 $\sum_i Y_i$	標本平均値 $\overline{X}$(cm)	不偏標本分散 s^2 (cm^2)
1	4	2	169.5	97.7
2	5	1	165.8	5.7
3	2	2	175.0	50
4	7	4	169.7	24.9
5	4	1	167.5	21.7
6	3	2	167.7	30.3
7	4	1	161.0	62
7.5	5	2	185.0	250
8	3	1	170.0	1.0
9	5	1	175.8	35.2
10	8	3	168.8	19.6
11	7	3	165.0	39.7
12	4	1	169.5	51.0
13	7	1	168.9	171.8

Excel で, 不偏標本分散は 統計ツール > 基本統計量 > で表示される標準偏差は, 不偏標本標準偏差である.

不偏標本分散の計算では桁落ちに注意. とりあえず多めの桁数で計算しておくか表計算ソフトウェアを使う

数値計算法

本当:$\frac{1}{2-1}[(170.0 - 169.5)^2 - (169.0 - 169.5)^2] = 0.5.$

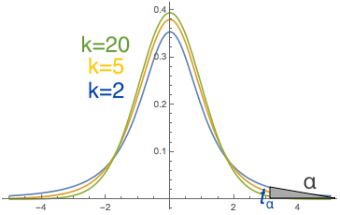
四捨五入:$\frac{1}{2-1}[(170 - 170)^2 - (169.0 - 170)^2] = 1.0.$ 有効数字 4 桁が 0 桁に.

t 分布とは

t 分布 西川確率統計定義 6.4,6.5(p143,144)

確率変数 Z が標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$, 確率変数 Y が自由度 k のカイ二乗分布 $\chi^2(k)$ にしたがい, Z と Y が独立であるとき, 連続型確率変数 $T = \frac{Z}{\sqrt{Y/k}}$ のしたがう分布を自由度 k の (スチューデントの, またはゴセットの)t 分布という.

だから, 標本平均値 $\overline{X}$ から作った統計量 $T = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{s^2}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}}{\sqrt{\frac{s^2}{\sigma^2}}} = \frac{Z}{\sqrt{Y/k}}$ は t 分布にしたがう.



k が小さいとずれが大きいが, $k \to +\infty$ では Y と Z はほぼ同じ.

ここまで来たよ

12 統計的仮説検定

13 母分散の区間推定と検定
- 不偏標本分散のちらばりとカイ二乗分布
- 母分散の区間推定
- 母分散の検定

母分散のカイ二乗検定 (母平均値未知) 西川確率統計 §7.4.3

未知の正規分布からの標本に基づき, 母分散が σ_0^2 かどうか判定したい!($\sigma^2 < \sigma_0^2$ と言いたい, または $\sigma^2 > \sigma_0^2$ と言いたい)

- 対立仮説 H_1 母分散 $\sigma < \sigma_0$ (または $\sigma > \sigma_0$)
- 帰無仮説 H_0 母分散 $\sigma = \sigma_0$.

$$P\left((n-1) \times \frac{s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right) = \alpha.$$

$$\text{または}\quad P\left(\chi^2_{\alpha}(n-1) < (n-1) \times \frac{s^2}{\sigma_0^2}\right) = \alpha.$$

片側検定の対立仮説 $\sigma^2 < \sigma_0^2$ (または $\sigma^2 > \sigma_0^2$)
両側検定の対立仮説 $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

母分散のカイ二乗検定 (母平均値未知) 西川確率統計 §7.4.3 II

母分散のカイ二乗検定の棄却域

母分散の片側カイ二乗検定の有意水準 α での棄却域は,

$$(n-1)\times\frac{s^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\alpha}(n-1),\quad \text{または}\chi^2_{\alpha}(n-1)<(n-1)\times\frac{s^2}{\sigma_0^2}$$

片側検定と両側検定

両側カイ二乗検定のときは, 両側に $\alpha/2$ ずつの棄却域ができる. いずれかにはいったら帰無仮説を棄却.
以前にやった t 検定にも両側検定 (やった) と片側検定がある.
片側 t 検定の対立仮説 $\mu<\mu_0$ (または $\mu>\mu_0$)
両側 t 検定の対立仮説 $\mu\neq\mu_0$

L13-Q3
TA Prob and Sol:母分散の片側カイ二乗検定

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは, 母分散が $4\mathrm{g}^2$ であることが定められているという.
トレーニング中のアルバイトの人に, ポテトフライ S サイズを 9 個作ってもらったところ, 重さは下のようだった (単位は g).

$$76, 76, 76, 76, 80, 84, 84, 84, 84.$$

このアルバイトの作るポテトフライ S の重さの母分散 σ^2 は, 2^2 より大きいか? 重さが正規分布にしたがうと仮定し, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で, 母分散のカイ二乗検定で判定しよう.

略解

1. 有意水準 $\alpha = 0.05$ で, 母分散の片側カイ二乗検定を行う.

2. 帰無仮説を，「アルバイトの…重さの正規分布の母分散 σ^2 は，2^2 に等しい」対立仮説を 2^2 より大きい」とする．
3. サイズ n の標本の不偏標本分散を s^2 とすると，量 $Y = (n-1) \times \frac{s^2}{2^2}$ は，自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従う．この量を検定統計量として用いる．
4. この標本に対して $Y = (n-1) \times \frac{s^2}{2^2} = (9-1) \cdot \frac{16}{2^2} = 32.$
5. カイ二乗分布表より，この値に対して不等式 $Y > \chi^2_\alpha(n-1) = 15.5073$ が成立するので，帰無仮説を棄却する．母分散は 2^2 より大きいと結論する．

棄却域に含まれなかったときの書き方は，「棄却域に含まれないので帰無仮説は棄却できない．母分散は 2^2 より大きいとは結論できない．」

西川確率統計例題 7.5(p.158)，問題 7.4(p.158)，演習 7.2(p.162)

L13-Q4

Quiz(母分散の両側カイ二乗検定)

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは, 母分散が $4\mathrm{g}^2$ であることが定められているという.
トレーニング中のアルバイトの人に, ポテトフライ S サイズを 9 個作ってもらったところ, 重さは下のようだった (単位は g).

$$76, 76, 76, 76, 80, 84, 84, 84, 84.$$

このアルバイトの作るポテトフライ S の重さの母分散 σ^2 は, 2^2 と異なるか? 重さが正規分布にしたがうと仮定し, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で, 母分散のカイ二乗検定で判定しよう.

連絡

- t 検定のレポート．Learn Math Moodle で個人別問題を印刷して, 1–5 の全てのステップを記入．2018-01-10 水の授業, 10 水昼, 11 木昼, 15 月昼,16 火昼の Math ラウンジに提出.
- ~~カイ二乗検定のレポート．Learn Math Moodle で個人別問題を印刷して, 1–5 の全てのステップを記入. 2018-01-17 水の授業, 15 月以降 22 月までの月火水木昼の Math ラウンジに提出.~~
- 次回は Excel と p 値 とカイ二乗検定
- 配布資料は 1-503 向かいの引出, `http://hig3.net` で再配布.
- 加減乗除と平方根 (ルート) の使える電卓持ってきてね．関数電卓でなくてもいいです．携帯電話の機能・アプリでもかまいません.
- 樋口オフィスアワー月 3.5(1-539) 金 4(1-502), Math ラウンジ月-木昼 (1-614)

ファイナルトライアル出題計画

外部記憶ペーパー使えます．電卓使用なし．必要な表は印刷します．Excel の問題はありません．
過去問題を公開していますが，出題傾向は毎年変わります．去年のものに対応するより，下の出題計画と Trial を参照することをお奨めします．
大注意:この計画は確定版ではありません．2018-01-18 木までに精密化・確定します．

- 離散型確率変数の確率・母期待値・母平均値・母分散を求める (L05, プチテスト再出題)
- 連続型確率変数の確率・母期待値・母平均値・母分散を求める (L06, プチテスト再出題)
- 正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ にしたがう確率変数が，ある条件を満たす確率を求める (L09)
- 二項分布にしたがう確率変数の確率を正規分布を利用して計算する (L10)
- 標本から母平均値を点推定・区間推定する (L10,L11)
- 標本から母分散を点推定・区間推定する (L10,L13)
- 標本から母比率を点推定・区間推定する (L10,L11)
- 標本から母平均値の両側 t 検定を行う (L12)
- 標本から母分散の片側カイ二乗検定を行う (L13)
- 標本抽出と推定と検定の意味 (p 値，信頼水準，検出力) に関する選択肢的な問 (L10,L12 ほか，数個)
- 確率分布 (正規分布，二項分布，t 分布，カイ二乗分布) についてのについての選択肢的な問 (数個)